7 APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Una vez que en la unidad anterior estudiaste los fundamentos teóricos de la derivada, ha llegado la hora de ponerlos en práctica. ¿Qué información sobre una función nos da su primera derivada? ¿Y la segunda? Quiero conocer si mi función cumple cierta propiedad. ¿A qué derivada debo acudir para "preguntar" por ella?

El conocimiento profundo del cálculo de derivadas nos permitirá resolver problemas de tangentes, conocer la "forma" de una función, establecer puntos importantes de esta, resolver indeterminaciones en el cálculo de límites, etc.

WIRIS, de forma directa, no nos ofrece estas aplicaciones. Sin embargo, con un poco de cuidado y siguiendo las indicaciones del libro de texto, podremos utilizar este software de una manera segura. Recuerda, WIRIS no debería sustituir tu trabajo con papel y lápiz. WIRIS no piensa: hace lo que le dices. Deberías utilizarlo como herramienta para cálculos rutinarios y para comprobar los resultados que has obtenido previamente. Y para algo muy útil que veremos más adelante: representar funciones.

RECTA TANGENTE A UNA CURVA EN UN PUNTO

Como decíamos antes, WIRIS no te da directamente esa recta tangente tan perseguida. Lo que sí puede darte es la ecuación de la recta, una vez que le introduces ciertos datos: un punto de la curva y su primera derivada en ese punto. Por desgracia, WIRIS no tiene un icono que dé la ecuación en forma punto-pendiente de una recta, dados un punto y su pendiente, así que tendrás que teclear tú la expresión general.

Imaginemos que a alguien se le ocurre preguntarnos cuál es la ecuación de la recta tangente a la siguiente función f en el punto $x = 0$:

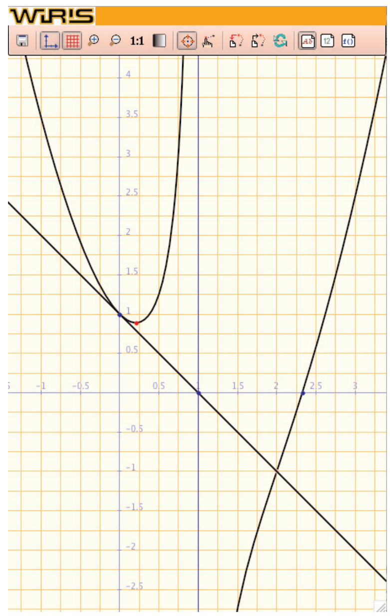
$$f(x) := \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x - 1}$$

Fácil, ¿no? Solo hay que calcular la derivada de f, evaluarla en el punto $x = 0$ y esa será la pendiente de la recta. Ahora solo queda escribir la ecuación punto-pendiente, simplificar un poco y ya tenemos nuestra respuesta. ¿Has intentado hacer la derivada de f? Bien, WIRIS nos facilitará mucho el trabajo.

$$f(x) := \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x - 1} \rightarrow x \mapsto \frac{x^3 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 1}{x - 1}$$

$$g = f(0) + f'(0)(x - 0) \rightarrow -x + 1$$

Pues ya ves, en solo dos líneas, WIRIS nos dice que la recta tangente a f en $x = 0$ es la $y = -x + 1$. Y si, además, la quieres ver representada:



Este es un sencillo ejemplo (vale, no tan sencillo) de cómo WIRIS nos puede ayudar a comprobar nuestras resoluciones.

INFORMACIÓN EXTRAÍDA DE LAS DERIVADAS

Primera derivada: máximos y mínimos

En el ejemplo anterior, nos podrían haber preguntado por la ecuación de la recta tangente a f que, además, es horizontal. Ah, eso WIRIS no sabe hacerlo. O también nos podrían haber preguntado por la ecuación de la recta tangente a f en su mínimo relativo. Vaya, otra cosa que WIRIS no sabe responder.

Sin embargo, como tú sí sabes interpretar las expresiones “es horizontal” o “en su mínimo relativo”, vas a conseguir que WIRIS te facilite los cálculos.

Por el libro de texto, ya sabes que los máximos y mínimos son puntos singulares de la función, es decir, son puntos donde se anula la primera derivada. Pues vamos a ver cómo WIRIS nos ofrece la solución, utilizando el mismo ejemplo anterior:

$$f(x) := \frac{x^3-3x^2+2x-1}{x-1} \rightarrow x \mapsto \frac{x^3-3\cdot x^2+2\cdot x-1}{x-1}$$

$$\text{resolver}(f'(x)=0) \rightarrow \{\{x=0.2063\}\}$$

$$\text{punto}(0.2063, f(0.2063)) \rightarrow (0.2063, 0.88988)$$

Y ahí tenemos nuestro punto singular, el (0,2063; 0,88988). Es un poco raro, pero piensa que la función que hemos elegido tampoco se presta mucho a números “bonitos”.

Observa que para calcular el punto singular hay que resolver la ecuación $f'(x) = 0$. Y para ello hemos utilizado el comando **Resolver**, tal como vimos en las primeras unidades de álgebra.

Hasta ahora estamos hablando de punto singular, pero ¿es un máximo o un mínimo? Para ello debes fijarte en el valor de la segunda derivada en el punto $x = 0{,}2063$. Mejor que lo haga WIRIS, ¿no?

$$f(x) := \frac{x^3-3x^2+2x-1}{x-1} \rightarrow x \mapsto \frac{x^3-3\cdot x^2+2\cdot x-1}{x-1}$$

$$\mathrm{resolver}(f'(x)=0) \rightarrow \{\{x=0.2063\}\}$$

$$\mathrm{punto}(0.2063, f(0.2063)) \rightarrow (0.2063, 0.88988)$$

$$g(x) := f'(x) \rightarrow x \mapsto f'(x)$$

$$h(x) := g'(x) \rightarrow x \mapsto g'(x)$$

$$h(0.2063) \rightarrow 6.$$

Es un poco lioso, pero hay que ir definiendo poco a poco cada una de las derivadas. Por fin, WIRIS nos dice que $f''(0{,}2063) = 6$, que es mayor que 0, lo cual significa que el punto singular que “hemos” calculado es un mínimo, como ya sabíamos desde que vimos la gráfica de f en el apartado anterior.

Segunda derivada: cóncava o convexa

Una vez visto qué información nos proporciona la primera derivada, vamos a ver qué nos cuenta la segunda. Esta nos dice si en un punto la función es cóncava, si es convexa, o si no es ninguna de las dos cosas.

Seguiremos con el ejemplo del principio, porque ya nos conocemos y para qué cambiar. Vamos a volver a utilizar el punto $x = 0$, porque hay que teclear menos que con el $x = 0{,}2063$, no por otra cosa.

$$f(x) := \frac{x^3-3x^2+2x-1}{x-1} \rightarrow x \mapsto \frac{x^3-3\cdot x^2+2\cdot x-1}{x-1}$$

$$g(x) := f'(x) \rightarrow x \mapsto f'(x)$$

$$h(x) := g'(x) \rightarrow x \mapsto g'(x)$$

$$h(0) \rightarrow 4$$

Es decir, $h(0) = f''(0) = 4 > 0$, que nos dice que la función en $x = 0$ es cóncava (como se ve claramente en la gráfica del primer apartado).

Alguien (otra vez ese alguien) podría preguntarnos si la función f tiene algún punto de inflexión. Para eso tenemos que ver en qué puntos se anula la segunda derivada.

$$h = g' \rightarrow \frac{2 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 4}{x^3 - 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 1}$$

Sí, esa es la segunda derivada de f. ¿Seguro que quieres hacerlo a mano? WIRIS vuelve a hacer su trabajo:

$$f(x) := \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x - 1} \rightarrow x \mapsto \frac{x^3 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 1}{x - 1}$$

$$g(x) := f'(x) \rightarrow x \mapsto f'(x)$$

$$h(x) := g'(x) \rightarrow x \mapsto g'(x)$$

$$\mathrm{resolver}(h(x) = 0) \rightarrow \{\{x = 2\}\}$$

Según WIRIS, en el punto $x = 2$, la función f tiene un punto de inflexión. Bueno, estrictamente hablando, ahora habría que comprobar que la tercera derivada no se anula en $x = 2$, pero eso, a estas alturas, ya lo puedes hacer solo.

Si te fijas en la gráfica de la función f que hay en el primer apartado, puedes observar que en el punto (2, –3) está nuestro punto de inflexión.