1 **Dada la parábola $y = -x^2 + 4x - 3$:**

a) Halla la pendiente de la recta r que une los puntos de la parábola de abscisas $x = 0$ y $x = 3$.

b) Escribe la ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a la recta r del apartado a).

Resolución

a) El punto de la parábola de abscisa $x = 0$ es el $(0, -3)$ y el de $x = 3$ es el $(3, 0)$.

Por tanto, la pendiente de la recta que los une es:

$$m = \frac{-3 - 0}{0 - 3} = \frac{-3}{-3} = 1$$

La ecuación de la recta es $y = x - 3$.

b) Cualquier recta paralela a r tiene la pendiente igual a 1. Buscamos los puntos en los que la derivada de la curva es igual a 1:

$$y' = -2x + 4 \rightarrow -2x + 4 = 1 \rightarrow x = \frac{3}{2},\ y = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{3}{2} - 3 = \frac{3}{4}$$

El punto de tangencia es $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

Ecuación de la recta tangente:

$$y = \frac{3}{4} + 1\left(x - \frac{3}{2}\right) \rightarrow y = x - \frac{3}{4}$$

2 **Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $y = \dfrac{x - 1}{x + 3}$. ¿Tiene máximos o mínimos?**

Resolución

Estudiamos el signo de la función derivada:

$y' = \dfrac{(x + 3) - (x - 1)}{(x + 3)^2} = \dfrac{4}{(x + 3)^2}$. El numerador y el denominador son positivos para cualquier valor de x.

La función es creciente en todo su dominio, $\mathbb{R} - \{3\}$, porque su derivada es positiva.

No tiene máximos ni mínimos porque es siempre creciente.

3 **Halla los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de la función:**

$$y = \frac{x^5}{5} - x^4 + x^3 - \frac{1}{10}$$

Resolución

- Máximos y mínimos: buscamos los puntos en los que la derivada es igual a 0.

$$y' = \frac{1}{5} \cdot 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 = x^4 - 4x^3 + 3x^2 \rightarrow y' = 0 \rightarrow x^2(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases}$$

Los posibles máximos y mínimos están en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 3$.

Comprobamos en la segunda derivada:

$y'' = 4x^3 - 12x^2 + 6x$

$y''(0) = 0$

$y''(1) < 0 \rightarrow$ máximo $\left(1, \dfrac{1}{10}\right)$

$y''(3) > 0 \rightarrow$ mínimo $\left(3, -\dfrac{11}{2}\right)$

- Buscamos los puntos de inflexión:

$$y'' = 0 \rightarrow 4x^3 - 12x^2 + 6x = 0 \rightarrow 2x(2x^2 - 6x + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 6x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$2x^2 - 6x + 3 = 0 \begin{cases} x = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{2} \simeq 2{,}4 \\ x = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}6 \end{cases}$$

Comprobamos en $y''' = 12x^2 - 24x + 6 \begin{cases} y'''(0) \neq 0 \\ y'''(2{,}4) \neq 0 \\ y'''(0{,}6) \neq 0 \end{cases}$

Puntos de inflexión:

$\left(0, -\dfrac{1}{10}\right)$; $(2{,}4; -3{,}4)$; $(0{,}6; 0{,}014)$

4 **La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ y que f no tiene extremo relativo en $x = 1$. Calcula a, b y c.**

Resolución

Si es $f'(1) = 0$ y no hay extremo relativo, tiene que haber un punto de inflexión en $x = 1$.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow f''(x) = 6x + 2a$$

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ f(1) = 1 \rightarrow 1 + a + b + c = 1 \\ &\bullet\ f'(1) = 0 \rightarrow 3 + 2a + b = 0 \\ &\bullet\ f''(1) = 0 \rightarrow 6 + 2a = 0 \end{aligned}\right\}$$ Resolviendo este sistema, obtenemos: $a = -3$, $b = 3$, $c = 0$

Por tanto, la función buscada es: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

5 **El número de personas ingresadas en un hospital por una infección después de t semanas viene dado por la función:**

$$N(t) = \frac{350t}{2t^2 - 3t + 8} \quad \text{siendo } t \geq 0$$

Calcula el máximo de personas ingresadas y la semana en que ocurre. ¿A partir de qué semana, después de alcanzar el máximo, el número de ingresados es menor que 25?

Resolución

- Para calcular el máximo, derivamos e igualamos a cero:

$$N'(t) = \frac{350(2t^2 - 3t + 8) - 350t(4t - 3)}{(2t^2 - 3t + 8)^2} = \frac{350(-2t^2 + 8)}{(2t^2 - 3t + 8)^2} = 0 \to$$

$$\to -2t^2 + 8 = 0 \to t^2 = 4 \begin{cases} t = -2 \ \text{(no vale, pues } t \geq 0) \\ t = 2 \to N(2) = \dfrac{350 \cdot 2}{2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 8} = 70 \end{cases}$$

El número máximo de personas ingresadas es 70, y ocurre en la 2.ª semana.

- Hemos de ver cuando $\dfrac{350t}{2t^2 - 3t + 8} < 25$.

$$350t < 50t^2 - 75t + 200 \to 50t^2 - 425t + 200 > 0 \to 2t^2 - 17t + 8 > 0 \to \text{Resolvemos la inecuación:}$$

$$f(t) = 2t^2 - 17t + 8 = 0 \begin{cases} t = 8 \\ t = 0{,}5 \end{cases}$$

$f(t) > 0$ | 0,5 | $f(t) < 0$ | 8 | $f(t) > 0$

$f(t) > 0$ para $t \in (0;\ 0{,}5) \cup (8, +\infty)$.

Después de alcanzar el máximo en $t = 2$, a partir de $t = 8$ el número de personas ingresadas es menor que 25.

6 **Sea $B(x) = ax + b\sqrt{x}$ la función de beneficios, en miles de euros, de una empresa. El beneficio máximo es de 50 miles de euros para $x = 100$ unidades producidas. Calcula a y b.**

Resolución

$B(x) = ax + b\sqrt{x}$

Sabemos que $B(100) = 50$ y $B'(100) = 0$

$B(100) = 100a + 10b = 50$

$$B'(x) = a + \frac{b}{2\sqrt{x}} \to B'(100) = a + \frac{b}{20} = 0$$

Resolvemos el siguiente sistema:

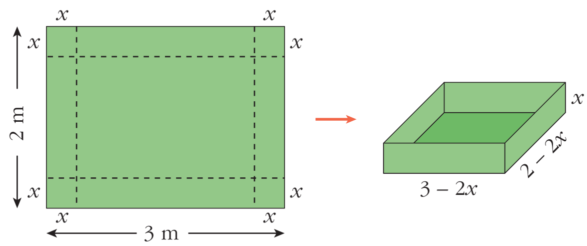
$$\begin{cases} 100a + 10b = 50 \\ a + \dfrac{b}{20} = 0 \to a = -\dfrac{b}{20} \end{cases}$$

$$100\left(-\frac{b}{20}\right) + 10b = 50 \to \frac{-b}{2} + b = 5 \to -b + 2b = 10 \to b = 10;\ a = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, $B(x) = -\dfrac{x}{2} + 10\sqrt{x}$.

7 **Con una cartulina rectangular de 2 m × 3 m, se quiere construir una caja sin tapa. Para ello, se recorta un cuadrado de cada uno de los vértices. Calcula el lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo.**

Resolución



El volumen de la caja es:

$V(x) = (3 - 2x) \cdot (2 - 2x) \cdot x, \quad x \in (0, 1)$

$V(x) = 6x - 10x^2 + 4x^3$

$V'(x) = 6 - 20x + 12x^2$

$V'(x) = 0 \ \to \ 6 - 20x + 12x^2 = 0 \ \to \ x = \dfrac{10 \pm \sqrt{28}}{12} \begin{cases} 1{,}27 \text{ (no vale)} \\ 0{,}39 \end{cases}$

$V''(x) = -20 + 24x; \quad V''(0{,}39) < 0 \ \Rightarrow \ x = 0{,}39$

Si $x = 0{,}39$ m, el volumen es máximo.