Resolución de algunos Ejercicios y Problemas: Ejercicio 10

10 **Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{8-3x}{x(x-2)}$ **b)** $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

d) $y = \dfrac{2x^2-3x}{2-x}$ **e)** $y = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x(x-3)(x-4)}$ **f)** $y = \dfrac{8}{x^2(x-3)}$

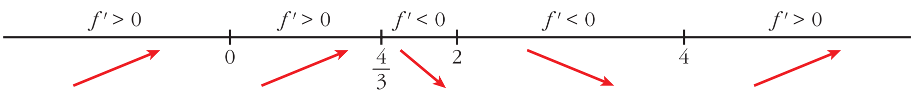
Resolución

a) $y = \dfrac{8-3x}{x(x-2)} = \dfrac{8-3x}{x^2-2x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0, 2\}$

$$f'(x) = \frac{-3(x^2-2x)-(8-3x)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \frac{-3x^2+6x-16x+16+6x^2-6x}{(x^2-2x)^2} = \frac{3x^2-16x+16}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2-16x+16 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{16 \pm \sqrt{256-192}}{6} = \frac{16 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{16 \pm 8}{6} \begin{cases} x = 4, \;\; f(4) = -1/2 \\ x = 4/3, \;\; f(4/3) = -9/2 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, 0) \cup \left(0, \dfrac{4}{3}\right) \cup (4, +\infty)$.

es decreciente en $\left(\dfrac{4}{3}, 2\right) \cup (2, 4)$.

tiene un máximo en $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{9}{2}\right)$.

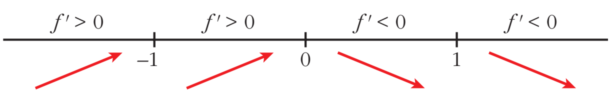
tiene un mínimo en $\left(4, -\dfrac{1}{2}\right)$.

b) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1)-(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -4x = 0 \;\rightarrow\; x = 0, \;\; f(0) = -1$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

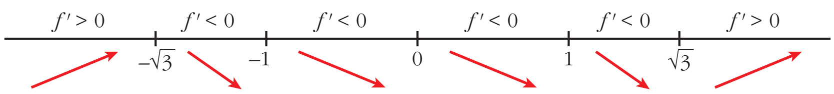
tiene un máximo en $(0, -1)$.

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x^2 - 3) = 0 \;\begin{cases} x = 0, \;\; f(0) = 0 \\ x = -\sqrt{3}, \;\; f(-\sqrt{3}) = (-3\sqrt{3})/2 \\ x = \sqrt{3}, \;\; f(\sqrt{3}) = (3\sqrt{3})/2 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

es decreciente en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$.

tiene un máximo en $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

tiene un mínimo en $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

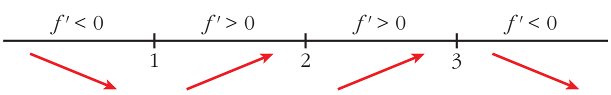
tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$.

d) $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{(4x - 3) \cdot (2 - x) - (2x^2 - 3x) \cdot (-1)}{(2 - x)^2} = \frac{8x - 4x^2 - 6 + 3x + 2x^2 - 3x}{(2 - x)^2} = \frac{-2x^2 + 8x - 6}{(2 - x)^2} = \frac{-2(x^2 - 4x + 3)}{(2 - x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 4x + 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \;\begin{cases} x = 3, \;\; f(3) = -9 \\ x = 1, \;\; f(1) = -1 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(1, 2) \cup (2, 3)$.

es decreciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(1, -1)$.

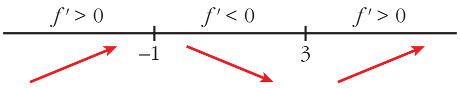
tiene un máximo en $(3, -9)$.

e) $y = x^3 - 3x^2 - 9x$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2}$
 $x = 3,\; f(3) = -27$
 $x = -1,\; f(-1) = 5$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

es decreciente en $(-1, 3)$.

tiene un máximo en $(-1, 5)$.

tiene un mínimo en $(3, -27)$.

f) $y = \dfrac{8}{x^2(x-3)} = \dfrac{8}{x^3 - 3x^2}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0, 3\}$

$$f'(x) = \frac{-8(3x^2 - 6x)}{x^4(x-3)^2} = \frac{-8x(3x-6)}{x^4(x-3)^2} = \frac{-8x(3x-6)}{x^3(x-3)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -8x(3x - 6) = 0$
 $x = 0$ (no vale)
 $x = 2,\; f(2) = -2$

Signo de la derivada:

La función: es creciente en $(0, 2)$.

es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

tiene un máximo en $(2, -2)$.