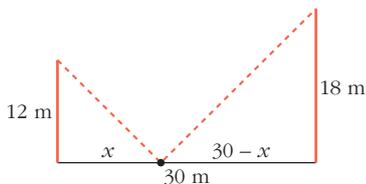




Ejercicio 45

45 Dos postes de 12 m y 18 m de altura distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de estos. ¿Dónde hay que situar el punto del suelo para que la longitud total del cable sea mínima?

Resolución



La longitud total del cable es:

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 12^2} + \sqrt{(30 - x)^2 + 18^2}; \text{ es decir:}$$

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1224}$$

$$\begin{aligned} L'(x) &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{2x - 60}{2\sqrt{x^2 - 60x + 1224}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1224}} = \\ &= \frac{x\sqrt{x^2 - 60x + 1224} + (x - 30)\sqrt{x^2 + 144}}{\sqrt{(x^2 + 144)(x^2 - 60x + 1224)}} \end{aligned}$$

$$L'(x) = 0 \rightarrow x\sqrt{x^2 - 60x + 1224} + (x - 30)\sqrt{x^2 + 144} = 0$$

$$x\sqrt{x^2 - 60x + 1224} = -(x - 30)\sqrt{x^2 + 144}$$

$$x^2(x^2 - 60x + 1224) = (x - 30)^2(x^2 + 144)$$

$$x^4 - 60x^3 + 1224x^2 = (x^2 - 60x + 900)(x^2 + 144)$$

$$x^4 - 60x^3 + 1224x^2 = x^4 + 144x^2 - 60x^3 - 8640x + 900x^2 + 129600$$

$$180x^2 + 8640x - 129600 = 0$$

$$x^2 + 48x - 720 = 0$$

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{2304 + 2880}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{5184}}{2} = \frac{-48 \pm 72}{2} \begin{cases} x = 12 \\ x = -60 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

(En $x = 12$ hay un mínimo, pues $L'(x) < 0$ a la izquierda de ese valor y $L'(x) > 0$ a su derecha).

Por tanto, el punto del suelo debe situarse a 12 m del poste de 12 m (y a 18 m del poste de 18 m).