Soluciones

Representa las siguientes funciones racionales:

1 $y = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$

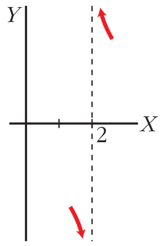
Resolución

Asíntotas

$x = 2$ es raíz del denominador y no lo es del numerador, es asíntota vertical. Veamos la posición de la curva respecto a ella estudiando sus signos en valores próximos a $x = 2$, por la derecha y por la izquierda:

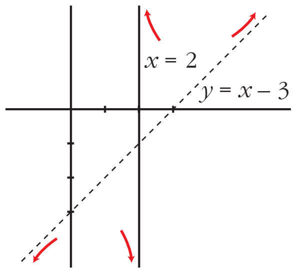
$f(x) < 0$ 2 $f(x) > 0$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$



$y = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} = x - 3 + \dfrac{1}{x - 2}$. La recta $y = x - 3$ es asíntota.

Observamos que, para valores grandes de x, $1/(x - 2)$ es positivo. Por tanto, la curva queda por encima de la asíntota.



Puntos singulares

Observando el bosquejo, vemos que hay un máximo relativo a la izquierda de $x = 2$ y un mínimo relativo a la derecha de $x = 2$. Obtengámoslos:

$$f'(x) = \frac{(2x - 5)(x - 2) - (x^2 - 5x + 7) \cdot 1}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$$

$f'(x) = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff x = 3,\ x = 1; \qquad f(3) = 1,\ f(1) = -3$

Los puntos singulares son (3, 1) y (1, –3).

Hay un mínimo relativo en (3, 1) y un máximo relativo en (1, –3).

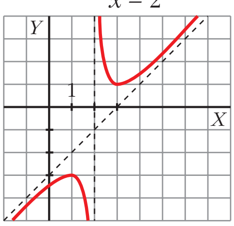
Cortes con los ejes

La curva no corta al eje X, ya que $x^2 - 5x + 7 = 0$ no tiene soluciones.

Corta al eje Y en (0, –7/2).

Representación

$y = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$



Soluciones

2 $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$

Resolución

Asíntotas

$$\frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}$$

La recta $y = x$ es asíntota. Para valores grandes de x, la curva queda por debajo de la asíntota, y para valores muy pequeños, la curva queda por encima.

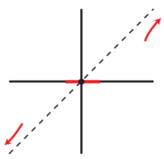
No tiene asíntotas verticales.

Puntos singulares

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \dots = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \iff x^2 = 0$ o $x^2 + 3 = 0 \iff x = 0$

Único punto singular: (0, 0).



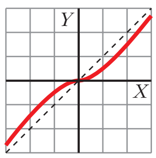
Cortes con los ejes

Salvo en (0, 0), no corta a los ejes coordenados en ningún otro punto.

Obtenemos más puntos: (1; 0,5), (2; 1,6), (3; 2,7) (–1; –0,5), (–2; –1,6), (–3; –2,7)

Representación

$y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$



3 $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2x}$

Resolución

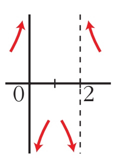
Asíntotas

El denominador tiene dos raíces: $x = 0$, $x = 2$. Son asíntotas verticales.

Veamos la posición de la curva respecto a ellas:

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

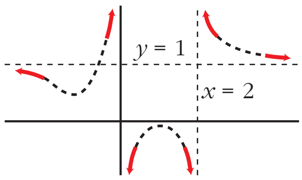


Soluciones

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-2x} = 1$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-2x} = 1$, tiene asíntota horizontal en $y = 1$.

Para valores grandes de x, la curva va por encima de la asíntota, y para valores muy pequeños, la curva se acerca a la asíntota por debajo.

Bosquejo de la curva



Puntos singulares

Observando el bosquejo, podemos deducir que la curva tendrá un mínimo a la izquierda de 0 y un máximo entre 0 y 2.

Veamos su localización, así como si hay otros puntos singulares además de estos.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-2x) - (x^2+1)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \ldots = \frac{-2x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}$$

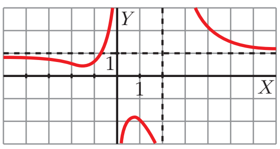
$$f'(x) = 0 \iff -2x^2 - 2x + 2 = 0 \iff x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1{,}62, \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}62$$

$f(-1{,}62) \approx 0{,}62$, $f(0{,}62) \approx -1{,}62$

Los únicos puntos singulares son (–1,62; 0,62) y (0,62; –1,62).

Representación

$y = \dfrac{x^2+1}{x^2-2x}$



4 $y = \dfrac{x^2+3x+11}{x+1}$

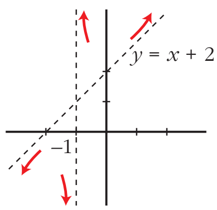
Resolución

Asíntotas

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \rightarrow x = -1$ es asíntota vertical.

$\dfrac{x^2+3x+11}{x+1} = x + 2 + \dfrac{9}{x+1} \rightarrow y = x + 2$ es asíntota oblicua.

Para valores grandes de x, la curva va por encima de la asíntota, y para valores pequeños de x, la curva va por debajo.

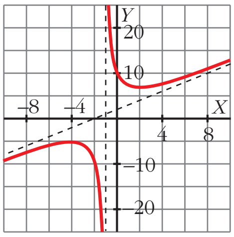


Soluciones

Puntos singulares y representación

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x_1 = 2, \; x_2 = -4$$

Máximo en (–4, –5); mínimo en (2, 7).



$$y = \frac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$$

5 $\boldsymbol{y = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}}$

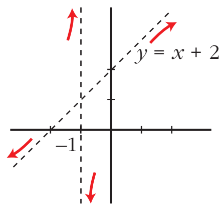
Resolución

Asíntotas

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \rightarrow x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1} = x + 2 - \frac{2}{x + 1} \rightarrow y = x + 2 \text{ es asíntota oblicua.}$$

Para valores grandes de x, la curva va por debajo de la asíntota, y para valores pequeños de x, la curva va por encima.

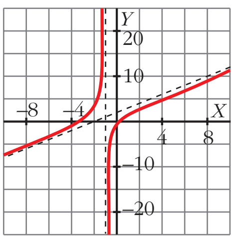


Cortes con los ejes

(0, 0) y (–3, 0)

Puntos singulares y representación

$$f'(x) = \frac{(2x + 3)(x + 1) - (x^2 + 3x)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2} \neq 0$$



$$y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$$

3. Ejercicios de repaso: representación de funciones racionales

Soluciones

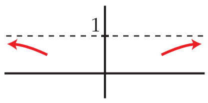
6 $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

Resolución

Asíntotas

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 \;\to\; y = 1$ es asíntota horizontal.

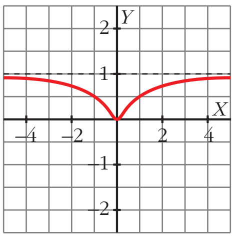
Tanto para valores grandes como para pequeños de x, la curva va por debajo de la asíntota.



Puntos singulares y representación

$f'(x) = \dfrac{2x(x^2 + 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{2x}{(x^2 + 1)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Mínimo en (0, 0).



$y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

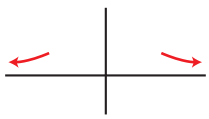
7 $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

Resolución

Asíntotas

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \;\to\; y = 0$ es asíntota horizontal.

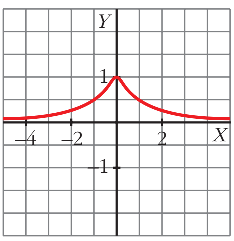
Tanto para valores grandes como para pequeños de x, la curva va por encima de la asíntota.



Puntos singulares y representación

$f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Máximo en (0, 1).



$y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

Soluciones

8 $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$

Resolución

Asíntotas

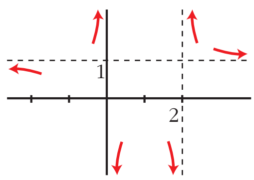
$x = 0$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 \;\to\; y = 1$ es asíntota horizontal.

Para valores grandes de x, la curva va por encima de $y = 1$, y para valores pequeños, la curva va por debajo.

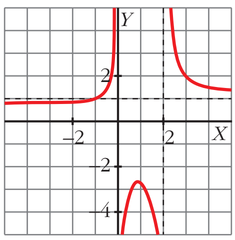


Puntos singulares y representación

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - 4x + 4}{(x^2 - 2x)^2};\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{cases} x_1 = 0{,}73 \\ x_2 = -2{,}73 \end{cases}$$

Máximo en (0,73; –2,73).

Mínimo en (–2,73; 0,73).



$y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$