1 **Se considera la función $f(x) = x^3 + 2x + 4$. ¿Tiene máximos y/o mínimos? ¿Tiene algún punto de inflexión? Estudia su curvatura y represéntala.**

Resolución

$f(x) = x^3 + 2x + 4$

- $f'(x) = 3x^2 + 2$

  $f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 = -2 \rightarrow$ no tiene solución.

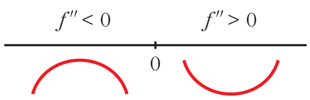
  $f'(x) > 0$ para todo $x \rightarrow f(x)$ es creciente.

  No tiene máximos ni mínimos.

- $f''(x) = 6x$

  $f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0,\ f(0) = 4$

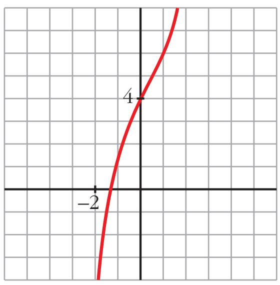
  Signo de $f''(x)$:



  Hay un punto de inflexión en $(0, 4)$.

- Además, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- Gráfica:

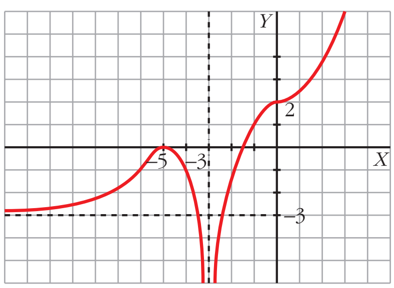


2 **Dibuja la gráfica de una función f de la que sabemos:**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty;\quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -3;\quad \lim_{x \to -3} f(x) = -\infty;$$

$$f'(-5) = 0;\ f'(0) = 0;\ f(-5) = 0;\ f(0) = 2$$

Resolución



Tiene tangente horizontal en los puntos $(-5, 0)$ y $(0, 2)$. En el primero tiene un máximo, y en el segundo, un punto de inflexión.

3 **Estudia las asíntotas y los puntos singulares de $f(x) = \dfrac{6x}{x^2 + 4}$ y represéntala gráficamente.**

Resolución

$$f(x) = \frac{6x}{x^2 + 4}$$

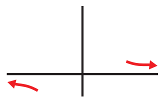
- Dominio: $\mathbb{R}$

- Asíntotas:

  No tiene asíntotas verticales, ya que $x^2 + 4 \neq 0$.

  Horizontales: $y = 0$, ya que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{6x}{x^2 + 4} = 0$

  $$\text{Posición} \begin{cases} \text{Si } x \to +\infty & f(x) > 0 \\ \text{Si } x \to -\infty & f(x) < 0 \end{cases}$$



- Puntos singulares:

  $$f'(x) = \frac{6(x^2 + 4) - 6x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-6x^2 + 24}{(x^2 + 4)^2}$$

  $$f'(x) = 0 \rightarrow -6x^2 + 24 = 0 \begin{cases} x = -2, & f(-2) = -3/2 \\ x = 2, & f(2) = 3/2 \end{cases}$$

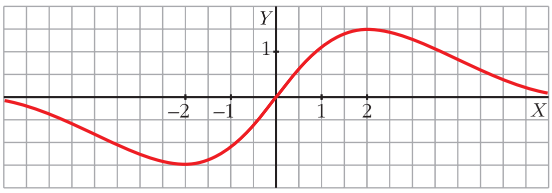
  Signo de $f'(x)$:

$f' < 0$		$f' > 0$		$f' < 0$
	-2		2	
↘		↗		↘

  Mínimo: $\left(-2, -\dfrac{3}{2}\right)$

  Máximo: $\left(2, \dfrac{3}{2}\right)$

- Representación:



4 **Representa la función:** $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Indica sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus extremos.

Resolución

$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ $\quad f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ No es derivable en $x = 2$.

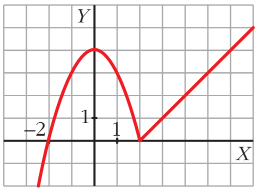
Para $x < 2$, la gráfica es una parábola con vértice en (0, 4).

Para $x > 2$, es una recta.

$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0,\ f(0) = 2$ <
- $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.
- Es decreciente en $(0, 2)$.

Tiene un máximo en el punto (0, 4) y un mínimo en (2, 0).

Representación:



5 **Estudia y representa la función** $y = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 3}$

Resolución

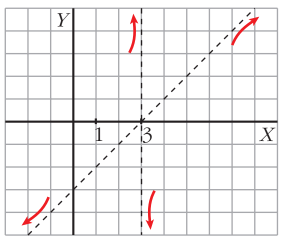
- Dominio: $\mathbb{R} - \{3\}$
- Asíntotas verticales: $x = 3$, porque $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = \pm\infty$

Posición <
- $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = -\infty$

- Asíntotas horizontales: no tiene, porque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = -\infty$
- Asíntotas oblicuas: expresamos la función de la forma $\dfrac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}} = \text{cociente} + \dfrac{\text{resto}}{\text{divisor}}$

$\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = x - 3 + \dfrac{-4}{x - 3} \rightarrow y = x - 3$ es la asíntota oblicua.

Posición <
- Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < x - 3$
- Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > x - 3$



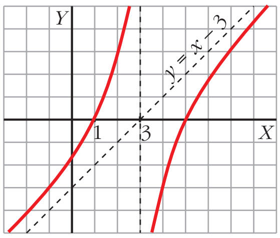
- Puntos singulares:

$$y' = \frac{(2x-6)(x-3)-(x^2-6x+5)}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+13}{(x-3)^2}$$

$$y' = 0 \rightarrow x^2-6x+13=0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} \text{ (no tiene solución).}$$

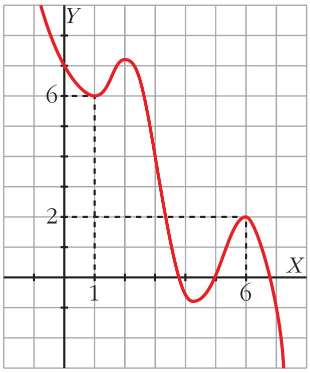
Signo de y': La derivada es positiva en todo el dominio. La función es creciente. No tiene máximos ni mínimos.

Corta a los ejes en los puntos $\left(0, -\frac{5}{3}\right)$, $(1, 0)$ y $(5, 0)$.



6 **Dibuja una función continua en $\mathbb{R}$ que tenga un mínimo relativo en (1, 6) y un máximo relativo en (6, 2). Si es un polinomio, ¿cuál será, como mínimo, su grado?**

Resolución



La función tendrá, como mínimo, cuatro puntos singulares, y para ello, su grado debe ser, al menos, 5.

7 **Halla los máximos y los mínimos de la función $f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$. ¿Tiene asíntotas?**

Haz una gráfica aproximada de esta función.

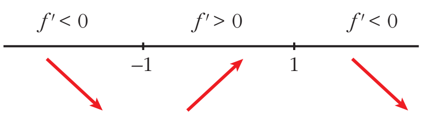
Resolución

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x} \rightarrow f'(x) = \frac{2(x+1)\cdot e^x - (x+1)^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{-x^2+1}{e^x}$$

Buscamos los puntos en los que se anula la derivada:

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{-x^2+1}{e^x} = 0 \rightarrow -x^2+1=0 \left\langle \begin{array}{l} x=-1,\ f(-1)=0 \\ x=1,\ f(1)=\frac{4}{e} \end{array} \right.$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$:



Máximo $\left(1, \frac{4}{e}\right)$

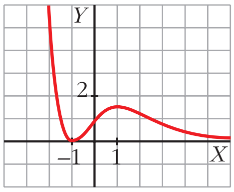
Mínimo $(-1, 0)$

Asíntotas:

- No tiene asíntotas verticales, ya que $e^x \neq 0$.
- Horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \text{ es asíntota hacia } +\infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = +\infty. \text{ No tiene asíntota hacia } -\infty.$$



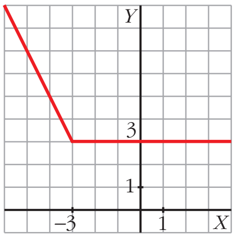
8 **Dibuja la gráfica de $f(x) = |x + 3| - x$.**

Resolución

Definimos la función por intervalos:

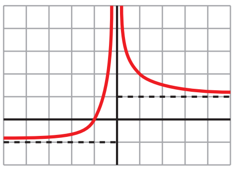
$(-x-3)-x$ | $(x+3)-x$
-3

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & \text{si } x < -3 \\ 3 & \text{si } x \geq -3 \end{cases}$$

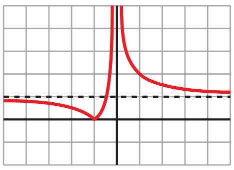


9 **¿Qué gráfica corresponde a $f(x) = \dfrac{x+1}{|x|}$?**

a)



b)



Resolución

$$f(x) = \frac{x+1}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{x+1}{-x} & \text{si } x < 0 \\[2mm] \dfrac{x+1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{-x} = -1 \\[4mm] \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1 \end{array}\right\}$$

- Asíntota vertical: $x = 0$
- Asíntotas horizontales: $y = -1$ e $y = 1$

La gráfica de f es la a).