12 Representa la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Estudia sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento, sus extremos relativos y su curvatura.

Resolución

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Continuidad:

  Si $x \neq 0$, f es continua por estar definida por polinomios.

  Si $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} x^3 - 3x + 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (x-1)^2 = 1 \\ f(0) = (0-1)^2 = 1 \end{array}\right\} \text{Como } \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0),\ f \text{ es continua en } x = 0.$$

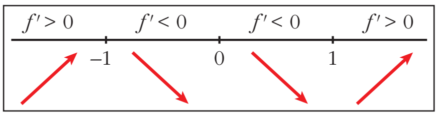
- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{ll} 3x^2 - 3 & \text{si } x < 0 \\ 2(x-1) & \text{si } x > 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} f'(0^-) = -3 \\ f'(0^+) = -2 \end{array}\right\} \text{Como } f'(0^-) \neq f'(0^+),\ f \text{ no es derivable en } x = 0.$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 0 \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \begin{cases} x = 1 \ \text{(no vale porque tiene que ser } x < 0) \\ x = -1;\ f(-1) = 3 \end{cases} \\ 2(x-1) = 0 \ \to \ x = 1;\ f(1) = 0 \end{cases}$$

  Signo de f':

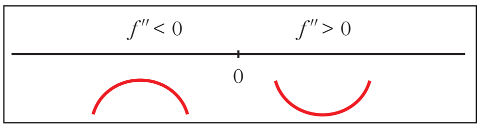


  Crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Decrece en $(-1, 1)$.
  Máximo en $(-1, 3)$. Mínimo en $(1, 0)$.

- Curvatura:

$$f''(x) = \left\{\begin{array}{ll} 6x & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} f''(0^-) = 0 \\ f''(0^+) = 2 \end{array}\right\} f''(0^-) \neq f''(0^+). \text{ Por tanto, no existe } f''(0).$$

  Signo de f'':



  Hay un punto de inflexión en $(0, 1)$.