Resolución de algunos Ejercicios y Problemas:
Ejercicio 17

17 **En las siguientes funciones se pide:**

- **Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto a ellas.**
- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento y extremos.**
- **Representación gráfica.**

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$ **b)** $y = \dfrac{3 - 2x}{x}$ **c)** $y = x^2 - \dfrac{2}{x}$ **d)** $y = \dfrac{x^2}{x + 2}$

Resolución

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$

- Dominio:

  $x^2 - 2x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = -1,\; x = 3.\;\; Dom = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

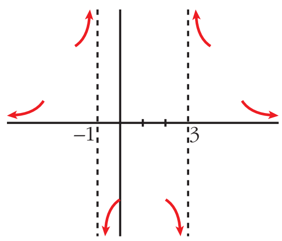
- Asíntotas verticales:

$$x = -1.\;\text{Posición}\; \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3} = -\infty \end{cases}$$

$$x = 3.\;\text{Posición}\; \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3} = +\infty \end{cases}$$

- Asíntota horizontal: $y = 0$, porque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3} = 0.$

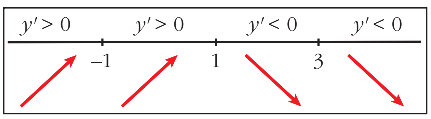
$$\text{Posición}\; \begin{cases} \text{Si}\;\; x \to +\infty,\;\; y > 0 \\ \text{Si}\;\; x \to -\infty,\;\; y > 0 \end{cases}$$



- Intervalos de crecimiento, de decrecimiento y extremos:

  $y' = \dfrac{-2x + 2}{(x^2 - 2x - 3)^2} = 0 \;\rightarrow\; -2x + 2 = 0 \;\rightarrow\; x = 1,\;\; f(1) = -\dfrac{1}{4}$

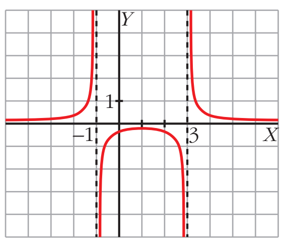
  Signo de y':



Máximo: $\left(1, -\dfrac{1}{4}\right)$

Intervalos de crecimiento: $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$

Intervalos de decrecimiento: $(1, 3) \cup (3, +\infty)$



Resolución de algunos Ejercicios y Problemas:

Ejercicio 17

b) $y = \dfrac{3 - 2x}{x}$

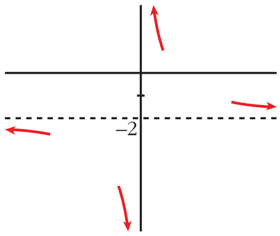
- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$
- Asíntotas verticales:

$x = 0$. Posición $\left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{3 - 2x}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3 - 2x}{x} = +\infty \end{array} \right.$

- Asíntota horizontal:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3 - 2x}{x} = -2, \quad y = -2.$

Posición $\left\langle \begin{array}{l} \text{Si } x \to +\infty, \ y > -2 \\ \text{Si } x \to -\infty, \ y < -2 \end{array} \right.$

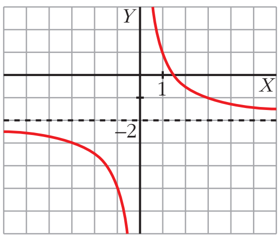


- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:

$y' = \dfrac{-2x - (3 - 2x)}{x^2} = \dfrac{-3}{x^2}$

Signo de y': Es negativa en todo su dominio.

La función es decreciente en su dominio. No tiene máximos ni mínimos.



c) $y = x^2 - \dfrac{2}{x}$

- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$
- Asíntota vertical:

$x = 0$. Posición $\left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \left(x^2 - \dfrac{2}{x}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \left(x^2 - \dfrac{2}{x}\right) = -\infty \end{array} \right.$

- Asíntota horizontal no tiene, porque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(x^2 - \dfrac{2}{x}\right) = +\infty$.
- Tampoco tiene asíntota oblicua porque:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(x - \dfrac{2}{x^2}\right) = \pm\infty$

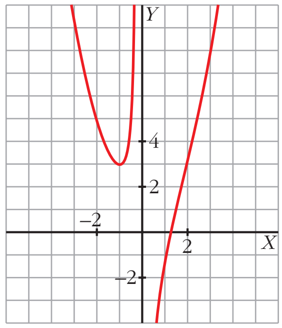
- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:

$y' = 2x + \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{2x^3 + 2}{x^2}; \quad y' = 0 \ \to \ 2x^3 + 2 = 0 \ \to \ x = -1, \ f(-1) = 3$

Signo de y':

$y' < 0$	-1	$y' > 0$	0	$y' > 0$
↘		↗		↗

Mínimo: $(-1, 3)$



Intervalos de crecimiento: $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$

Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, -1)$

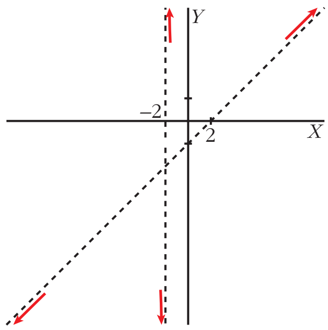
d) $y = \dfrac{x^2}{x + 2}$

- Dominio: $\mathbb{R} - \{-2\}$
- Asíntotas verticales: $x = -2$

Posición $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^2}{x+2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^2}{x+2} = +\infty \end{cases}$

- Asíntota horizontal no tiene, porque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{x+2} = \pm\infty$.
- Asíntota oblicua:

$$\begin{array}{rl} x^2 & \underline{|\ x+2} \\ \underline{-x^2 - 2x} & \quad x - 2 \\ -2x & \\ \underline{2x + 4} & \\ 4 & \end{array} \quad \to \quad y = x - 2 + \frac{4}{x+2}$$



La recta $y = x - 2$ es una asíntota oblicua.

Posición $\begin{cases} \text{Si } x \to +\infty, \ y > x - 2 \\ \text{Si } x \to -\infty, \ y < x - 2 \end{cases}$

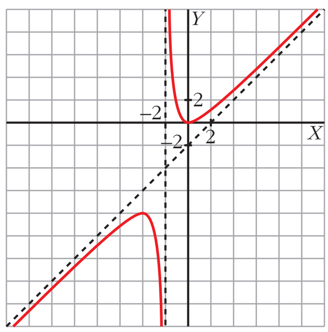
- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$$

$$y' = 0 \ \to \ x^2 + 4x = 0 \ \begin{cases} x = 0; \ \ y = 0 \\ x = -4; \ \ y = -8 \end{cases}$$

Signo de y':

$y' > 0$	-4	$y' < 0$	-2	$y' < 0$	0	$y' > 0$
↗		↘		↘		↗



Crece en $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$.

Decrece en $(-4, -2) \cup (-2, 0)$.

Máximo: $(-4, -8)$

Mínimo: $(0, 0)$