23 **La recta $y = 2x + 6$ es una asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x - k}$. Halla el valor de k y representa la función así obtenida.**

Resolución

- **Hallamos k:**

Si $y = 2x + 6$ es asíntota oblicua, tenemos que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2; \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = 6$$

Por tanto:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - kx} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x^2 + 1}{x - k} - 2x\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 1 - 2x^2 + 2kx}{x - k} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2kx + 1}{x - k} = 2k = 6 \quad \rightarrow \quad k = 3$$

También podríamos efectuar la división:

$$\begin{array}{rl|l} 2x^2 + 1 & & x - k \\ \cline{3-3} -2x^2 + 2kx & & 2x + 2k \\ \cline{1-2} 2kx + 1 & & \\ -2kx + 2k^2 & & \\ \cline{1-2} 1 + 2k^2 & & \end{array}$$

La asíntota oblicua es $y = 2x + 2k$.

$2x + 2k = 2x + 6 \;\rightarrow\; 2k = 6 \;\rightarrow\; k = 3$

Por tanto, $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x - 3}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{3\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 3 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = 2x + 6$ es asíntota oblicua.

(Si $x \to -\infty$, $f(x) < 2x + 6$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 2x + 6$)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{4x(x-3) - (2x^2+1)}{(x-3)^2} = \frac{4x^2 - 12x - 2x^2 - 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2 - 12x - 1}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 12x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{12 \pm \sqrt{144+8}}{4} \begin{cases} x = 6{,}08, \; f(6{,}08) = 24{,}32 \\ x = -0{,}08, \; f(-0{,}08) = -0{,}33 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

$f' > 0$	$-0{,}08$	$f' < 0$	3	$f' < 0$	$6{,}08$	$f' > 0$
↗		↘		↘		↗

$f(x)$ es creciente en $(-\infty; -0{,}08) \cup (6{,}08; +\infty)$.

es decreciente en $(-0{,}08; 3) \cup (3; 6{,}08)$.

tiene un máximo en $(-0{,}08; -0{,}33)$.

tiene un mínimo en $(6{,}08; 24{,}32)$.

- **Gráfica:**