



### Ejercicio 23

**23** La recta  $y = 2x + 6$  es una asíntota oblicua de la función  $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - k}$ . Halla el valor de  $k$  y representa la función así obtenida.

#### Resolución

- **Hallamos  $k$ :**

Si  $y = 2x + 6$  es asíntota oblicua, tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 6$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - kx} = 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{2x^2 + 1}{x - k} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1 - 2x^2 + 2kx}{x - k} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2kx + 1}{x - k} = 2k = 6 \quad \rightarrow \quad k = 3 \end{aligned}$$

También podríamos efectuar la división:

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 1 \quad \quad \quad | \quad x - k \\ -2x^2 + 2kx \quad \quad \quad | \quad 2x + 2k \\ \hline 2kx + 1 \\ -2kx + \quad 2k^2 \\ \hline 1 + 2k^2 \end{array}$$

La asíntota oblicua es  $y = 2x + 2k$ .

$$2x + 2k = 2x + 6 \quad \rightarrow \quad 2k = 6 \quad \rightarrow \quad k = 3$$

Por tanto,  $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 3}$

- **Dominio:**  $\mathbb{R} - \{3\}$

- **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 3 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = 2x + 6$  es asíntota oblicua.

(Si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < 2x + 6$ ; si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > 2x + 6$ )



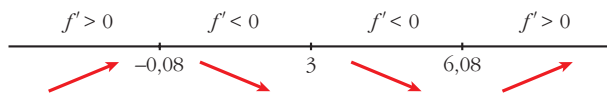
### Ejercicio 23

- Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{4x(x-3) - (2x^2 + 1)}{(x-3)^2} = \frac{4x^2 - 12x - 2x^2 - 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2 - 12x - 1}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2 - 12x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 8}}{4} \begin{cases} x = 6,08, & f(6,08) = 24,32 \\ x = -0,08, & f(-0,08) = -0,33 \end{cases}$$

Signo de  $f'(x)$ :



$f(x)$  es creciente en  $(-\infty; -0,08) \cup (6,08; +\infty)$ .

es decreciente en  $(-0,08; 3) \cup (3; 6,08)$ .

tiene un máximo en  $(-0,08; -0,33)$ .

tiene un mínimo en  $(6,08; 24,32)$ .

- Gráfica:**

