



Ejercicio 26

26 Representa las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x}{e^x}$

b) $y = \frac{\ln x}{x}$

c) $y = x \ln x$

d) $y = (x - 1)e^x$

e) $y = e^{-x^2}$

f) $y = x^2 e^{-x}$

g) $y = \frac{x^3}{\ln x}$

h) $y = \ln(x^2 - 1)$

Resolución

a) $y = \frac{x}{e^x}$

- **Dominio:** \mathbb{R} (ya que $e^x \neq 0$ para todo x).

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ ($f(x) > 0$).

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 1 - x = 0 \rightarrow x = 1$$

Signo de $f'(x)$: $\frac{f' > 0}{\quad} \quad \frac{f' < 0}{\quad}$

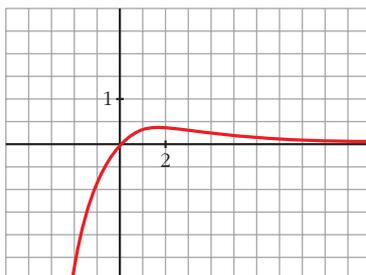
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$.

es decreciente en $(1, +\infty)$.

tiene un máximo en $\left(1, \frac{1}{e}\right)$.

- Corta a los ejes en el punto $(0, 0)$.

• **Gráfica:**





Ejercicio 26

b) $y = \frac{\ln x}{x}$

- **Dominio:** $(0, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \rightarrow x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

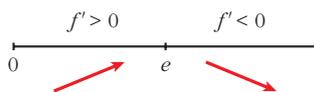
$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ ($f(x) > 0$).

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{(1/x) \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e$$

Signo de $f'(x)$:



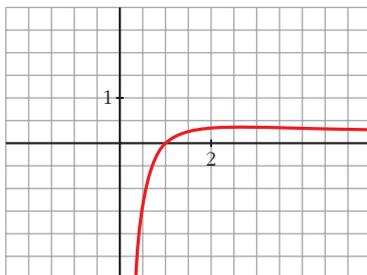
$f(x)$ es creciente en $(0, e)$.

es decreciente en $(e, +\infty)$.

tiene un máximo en $(e, \frac{1}{e})$.

- Corta al eje X en $(1, 0)$.

- **Gráfica:**



c) $y = x \ln x$

- **Dominio:** $(0, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = 0$$

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$



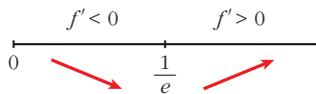
Ejercicio 26

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Signo de $f'(x)$:



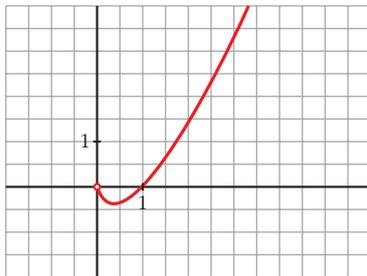
$f(x)$ es decreciente en $\left(0, \frac{1}{e}\right)$.

es creciente en $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

tiene un mínimo en $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$.

- Corta al eje X en $(1, 0)$.

- **Gráfica:**



d) $y = (x - 1)e^x$

- **Dominio:** \mathbb{R}

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x - 1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 1}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$ ($f(x) < 0$).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

- **Puntos singulares:**

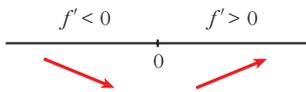
$$f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = e^x(1 + x - 1) = xe^x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$



Ejercicio 26

Signo de $f'(x)$:



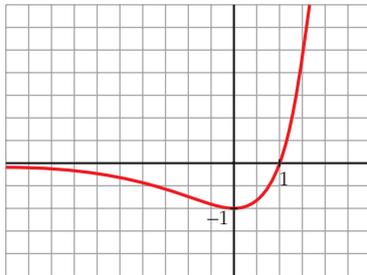
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$.

es creciente en $(0, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(0, -1)$.

- Corta al eje X en $(1, 0)$.

- **Gráfica:**



e) $y = e^{-x^2}$

- **Dominio:** \mathbb{R}

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

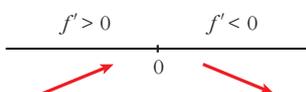
$y = 0$ es asíntota horizontal ($f(x) > 0$ para todo x).

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:

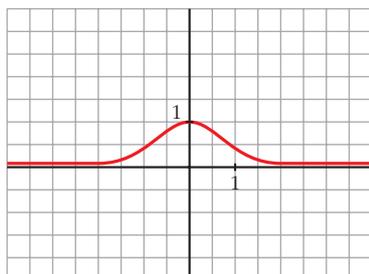


$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$.

es decreciente en $(0, +\infty)$.

tiene un máximo en $(0, 1)$.

- **Gráfica:**





Ejercicio 26

f) $y = x^2 e^{-x}$

• **Dominio:** \mathbb{R}

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = 0$$

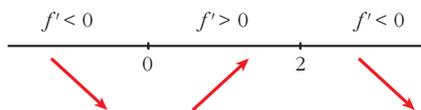
$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ ($f(x) > 0$).

• **Puntos singulares:** $y = \frac{x^2}{e^x}$

$$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(2x - x^2)}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - x^2 = 0 \rightarrow x(2 - x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



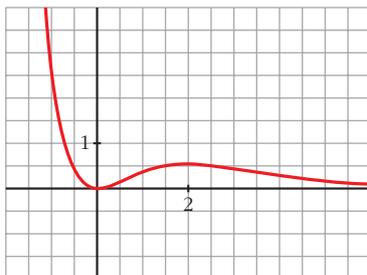
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

es creciente en $(0, 2)$.

tiene un mínimo en $(0, 0)$.

tiene un máximo en $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$.

• **Gráfica:**





Ejercicio 26

$$g) y = \frac{x^3}{\ln x}$$

• **Dominio:**

$$\ln x = 0 \rightarrow x = 1. \text{ Además, ha de ser } x > 0.$$

$$Dom = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

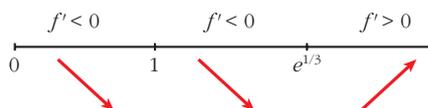
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{3x^2 \ln x - x^3 \cdot (1/x)}{(\ln x)^2} = \frac{3x^2 \ln x - x^2}{(\ln x)^2} = \frac{x^2(3 \ln x - 1)}{(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(3 \ln x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (no vale)} \\ \ln x = 1/3 \rightarrow x = e^{1/3} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

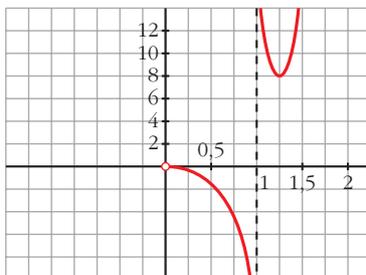


$f(x)$ es decreciente en $(0, 1) \cup (1, e^{1/3})$.

es creciente en $(e^{1/3}, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(e^{1/3}, 3e)$.

• **Gráfica:**





Ejercicio 26

h) $y = \ln(x^2 - 1)$

- **Dominio:** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \rightarrow x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \rightarrow x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{array} \right\} \text{Ramas parabólicas}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

No hay puntos singulares ($x = 0$ no pertenece al dominio).

- **Puntos de corte con el eje X:**

$$\ln(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 1 \rightarrow x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Puntos: $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$

- **Gráfica:**

