



### Ejercicio 26

**26** Representa las siguientes funciones:

a)  $y = \frac{x}{e^x}$

b)  $y = \frac{\ln x}{x}$

c)  $y = x \ln x$

d)  $y = (x - 1)e^x$

e)  $y = e^{-x^2}$

f)  $y = x^2 e^{-x}$

g)  $y = \frac{x^3}{\ln x}$

h)  $y = \ln(x^2 - 1)$

**Resolución**

a)  $y = \frac{x}{e^x}$

- **Dominio:**  $\mathbb{R}$  (ya que  $e^x \neq 0$  para todo  $x$ ).

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$y = 0$  es asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow +\infty$  ( $f(x) > 0$ ).

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 1 - x = 0 \rightarrow x = 1$$

Signo de  $f'(x)$ :  $\frac{f' > 0}{\quad} \frac{f' < 0}{\quad}$

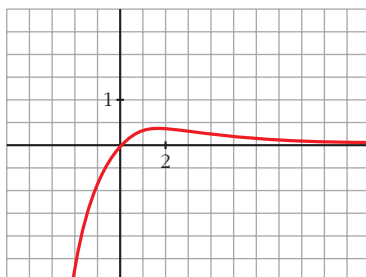
$f(x)$  es creciente en  $(-\infty, 1)$ .

es decreciente en  $(1, +\infty)$ .

tiene un máximo en  $\left(1, \frac{1}{e}\right)$ .

- Corta a los ejes en el punto  $(0, 0)$ .

• **Gráfica:**





### Ejercicio 26

b)  $y = \frac{\ln x}{x}$

- **Dominio:**  $(0, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \rightarrow x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

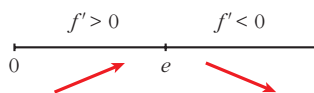
$y = 0$  es asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow +\infty$  ( $f(x) > 0$ ).

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{(1/x) \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e$$

Signo de  $f'(x)$ :



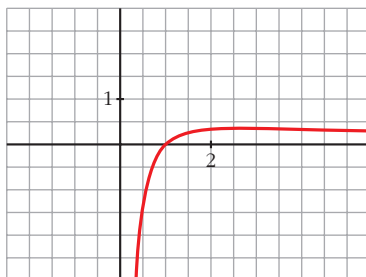
$f(x)$  es creciente en  $(0, e)$ .

es decreciente en  $(e, +\infty)$ .

tiene un máximo en  $(e, \frac{1}{e})$ .

- Corta al eje  $X$  en  $(1, 0)$ .

- **Gráfica:**



c)  $y = x \ln x$

- **Dominio:**  $(0, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = 0$$

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$



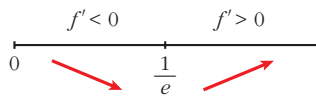
### Ejercicio 26

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Signo de  $f'(x)$ :



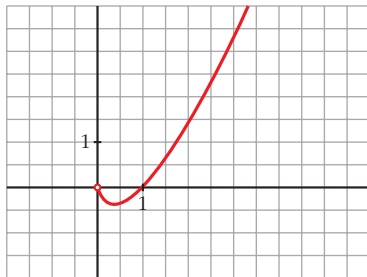
$f(x)$  es decreciente en  $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ .

es creciente en  $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ .

tiene un mínimo en  $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$ .

- Corta al eje  $X$  en  $(1, 0)$ .

- **Gráfica:**



d)  $y = (x - 1)e^x$

- **Dominio:**  $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x - 1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 1}{e^x} = 0$$

$y = 0$  es asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow -\infty$  ( $f(x) < 0$ ).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

- **Puntos singulares:**

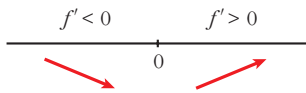
$$f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = e^x(1 + x - 1) = xe^x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$



### Ejercicio 26

Signo de  $f'(x)$ :



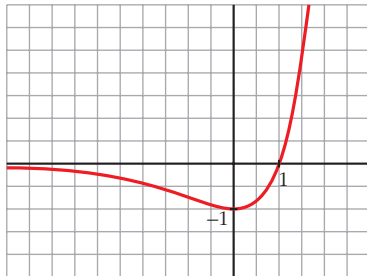
$f(x)$  es decreciente en  $(-\infty, 0)$ .

es creciente en  $(0, +\infty)$ .

tiene un mínimo en  $(0, -1)$ .

- Corta al eje  $X$  en  $(1, 0)$ .

- **Gráfica:**



e)  $y = e^{-x^2}$

- **Dominio:**  $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

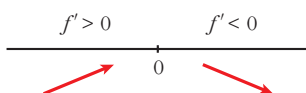
$y = 0$  es asíntota horizontal ( $f(x) > 0$  para todo  $x$ ).

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de  $f'(x)$ :

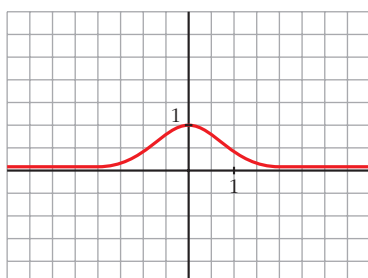


$f(x)$  es creciente en  $(-\infty, 0)$ .

es decreciente en  $(0, +\infty)$ .

tiene un máximo en  $(0, 1)$ .

- **Gráfica:**





### Ejercicio 26

f)  $y = x^2 e^{-x}$

• **Dominio:**  $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = 0$$

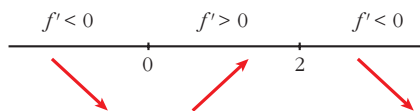
$y = 0$  es asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow +\infty$  ( $f(x) > 0$ ).

• **Puntos singulares:**  $y = \frac{x^2}{e^x}$

$$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(2x - x^2)}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - x^2 = 0 \rightarrow x(2 - x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de  $f'(x)$ :



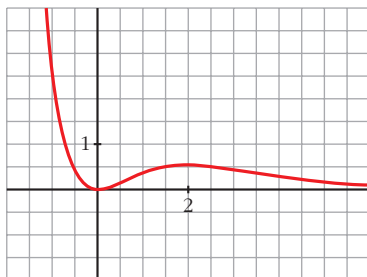
$f(x)$  es decreciente en  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ .

es creciente en  $(0, 2)$ .

tiene un mínimo en  $(0, 0)$ .

tiene un máximo en  $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$ .

• **Gráfica:**





### Ejercicio 26

$$g) y = \frac{x^3}{\ln x}$$

• **Dominio:**

$$\ln x = 0 \rightarrow x = 1. \text{ Además, ha de ser } x > 0.$$

$$Dom = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

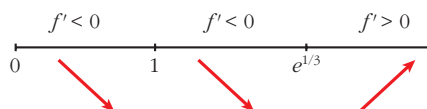
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{3x^2 \ln x - x^3 \cdot (1/x)}{(\ln x)^2} = \frac{3x^2 \ln x - x^2}{(\ln x)^2} = \frac{x^2(3 \ln x - 1)}{(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(3 \ln x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (no vale)} \\ \ln x = 1/3 \rightarrow x = e^{1/3} \end{cases}$$

Signo de  $f'(x)$ :

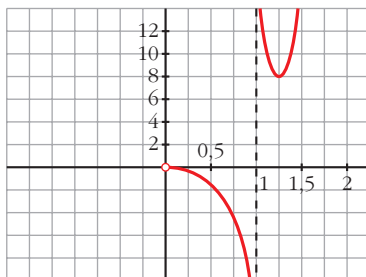


$f(x)$  es decreciente en  $(0, 1) \cup (1, e^{1/3})$ .

es creciente en  $(e^{1/3}, +\infty)$ .

tiene un mínimo en  $(e^{1/3}, 3e)$ .

• **Gráfica:**





h)  $y = \ln(x^2 - 1)$

- **Dominio:**  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \rightarrow x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \rightarrow x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{array} \right\} \text{Ramas parabólicas}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

No hay puntos singulares ( $x = 0$  no pertenece al dominio).

- **Puntos de corte con el eje X:**

$$\ln(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 1 \rightarrow x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Puntos:  $(-\sqrt{2}, 0)$  y  $(\sqrt{2}, 0)$

- **Gráfica:**

