**1** **Resuelve las integrales siguientes:**

**a)** $\displaystyle\int\left(\frac{7}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right) dx$ **b)** $\displaystyle\int\frac{1 - x^3}{x}\, dx$ **c)** $\displaystyle\int\left(\frac{3 - 5x}{2}\right)^2 dx$

**d)** $\displaystyle\int\left(\frac{2}{x^2} + \sqrt{2x}\right) dx$ **e)** $\displaystyle\int x\sqrt{2x^2 + 1}\, dx$ **f)** $\displaystyle\int\frac{x^2 + 3x - 2}{x - 1}\, dx$

***Resolución***

a) $$\int\left(\frac{7}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{7}{3}\,\frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{1}{2}x + k = \frac{7}{9}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x + k$$

b) $$\int\frac{1 - x^3}{x}\, dx = \int\frac{1}{x}\, dx - \int x^2\, dx = \ln|x| - \frac{x^3}{3} + k$$

c) $$\int\left(\frac{3 - 5x}{2}\right)^2 dx = -\frac{2}{5}\int -\frac{5}{2}\left(\frac{3 - 5x}{2}\right)^2 dx = -\frac{2}{5}\,\frac{1}{3}\left(\frac{3 - 5x}{2}\right)^3 + k = \frac{-2}{15}\left(\frac{3 - 5x}{2}\right)^3 + k$$

d) $$\int\left(\frac{2}{x^2} + \sqrt{2x}\right) dx = \int 2x^{-2}\, dx + \int\sqrt{2}\, x^{1/2}\, dx = 2\frac{x^{-1}}{-1} + \sqrt{2}\,\frac{x^{3/2}}{3/2} + k = -\frac{2}{x} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3} + k$$

e) $$\int x\sqrt{2x^2 + 1}\, dx = \frac{1}{4}\int 4x(2x^2 + 1)^{1/2}\, dx = \frac{1}{4}\,\frac{(2x^2 + 1)^{3/2}}{3/2} + k = \frac{1}{6}\sqrt{(2x^2 + 1)^3} + k$$

f) $$\int\frac{x^2 + 3x - 2}{x - 1}\, dx$$

$$\begin{array}{r|l}
x^2 + 3x - 2 & x - 1 \\ \cline{2-2}
-x^2 + \phantom{3}x & x + 4 \\ \cline{1-1}
4x - 2 & \\
-4x + 4 & \\ \cline{1-1}
2 &
\end{array}$$

$$\frac{\text{Dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$$

$$\frac{x^2 + 3x - 2}{x - 1} = x + 4 + \frac{2}{x - 1}$$

$$\int\frac{x^2 + 3x - 2}{x - 1}\, dx = \int\left(x + 4 + \frac{2}{x - 1}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 4x + 2\ln|x - 1| + k$$

**2** **Calcula:**

**a)** $\displaystyle\int_{-1}^{3}\frac{2}{x + 2}\, dx$ **b)** $\displaystyle\int_{1/3}^{2} e^{3x - 1}\, dx$

***Resolución***

a) $$\int_{-1}^{3}\frac{2}{x + 2}\, dx = \Big[2\ln|x + 2|\Big]_{-1}^{3} = 2[\ln 5 - \ln 1] = 2\ln 5$$

b) $$\int_{1/3}^{2} e^{3x - 1}\, dx = \frac{1}{3}\int_{1/3}^{2} 3e^{3x - 1} = \frac{1}{3}\Big[e^{3x - 1}\Big]_{1/3}^{2} = \frac{1}{3}(e^5 - e^0) = \frac{e^5 - 1}{3}$$

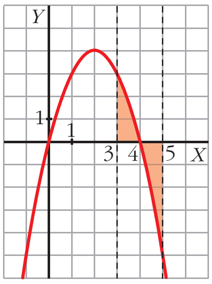
**3** **Calcula el área limitada por $f(x) = 4x - x^2$, el eje $OX$ y las rectas $x = 3$ y $x = 5$.**

***Resolución***

Representamos $y = 4x - x^2$.

Cortes con los ejes: $x = 0,\ y = 0$; $y = 0 \to x = 0,\ x = 4$

Vértice: $y' = 0 \ \to\ 4 - 2x = 0 \ \to\ x = 2,\ y = 4$



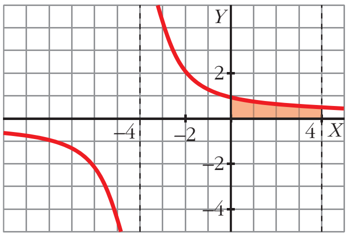

$$\text{Área} = \int_3^4 (4x - x^2)\,dx + \left|\int_4^5 (4x - x^2)\,dx\right| =$$

$$= \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_3^4 + \left|\left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_4^5\right| = \left(\frac{32}{3} - 9\right) + \left|-\frac{7}{3}\right| = 4\ \text{u}^2$$

**4** **La curva $y = \dfrac{4}{x + 4}$, el eje $OX$, el eje $OY$ y la recta $x = 4$ limitan una superficie $S$. Calcula el área de $S$.**

***Resolución***

Representamos $y = \dfrac{4}{x + 4}$. Sus asíntotas son $x = -4$ e $y = 0$.




$$\text{Área} = \int_0^4 \frac{4}{x + 4}\,dx = 4\left[ln\,|x + 4|\right]_0^4 =$$

$$= 4(ln\ 8 - ln\ 4) = 4\ ln\ \frac{8}{4} = 4\ ln\ 2 \simeq 2{,}77\ \text{u}^2$$

**5** **El consumo de un motor, en un trabajo de 6 horas, viene dado por la expresión $c(t) = -t^2 + 8t + 20$, siendo $t$ el tiempo en horas, $0 \le t \le 6$.**

**¿Cuánto consume el motor en las 6 horas que dura el trabajo?**

***Resolución***

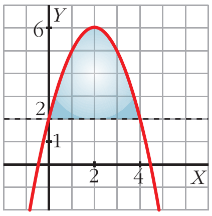
El consumo equivale al área encerrada por la función $c(t)$ entre las rectas $x = 0$ y $x = 6$.

$$c = \int_0^6 (-t^2 + 8t + 20)\,dx = \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{8t^2}{2} + 20t\right]_0^6 = -\frac{6^3}{3} + 4 \cdot 6^2 + 20 \cdot 6 = 192$$

**6** **Para cerrar una vidriera, se ha de colocar un cristal cuya superficie está limitada por las funciones $y = 2$ e $y = -(x - 2)^2 + 6$. Dibuja el cristal y calcula su área ($x$ e $y$ en dm).**

***Resolución***

$y = -(x - 2)^2 + 6$ es una parábola de vértice (2, 6).




Puntos de corte con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = 2$

$y = 0 \rightarrow -x^2 + 4x + 2 = 0 \begin{cases} x = -0{,}45 \\ x = 4{,}45 \end{cases}$

Puntos de corte de la curva con $y = 2$:

$2 = -(x - 2)^2 + 6 \rightarrow -x^2 + 4x = 0 \begin{cases} x = 0, \ \ y = 2 \\ x = 4, \ \ y = 2 \end{cases}$

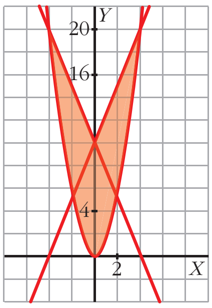
$$\text{Área del cristal} = \int_0^4 [-(x-2)^2 + 6 - 2]\, dx = \int_0^4 (-x^2 + 4x)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^4 = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{32}{3} \text{ dm}^2$$

**7** **Representa gráficamente la región limitada por las gráficas de las funciones siguientes y calcula su área:**

$$f(x) = \frac{5}{4}x^2 \qquad g(x) = \frac{1}{2}(5x + 20) \qquad h(x) = \frac{1}{2}(-5x + 20)$$

***Resolución***

Representamos la parábola $f(x)$, y las rectas $g(x)$ y $h(x)$.




- Cortes de $f(x)$ y $g(x)$:

$\frac{5}{4}x^2 = \frac{1}{2}(5x + 20) \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \begin{cases} x = -2, \ \ y = 5 \\ x = 4, \ \ y = 20 \end{cases}$

- Cortes de $f(x)$ y $h(x)$:

$\frac{5}{4}x^2 = \frac{1}{2}(-5x + 20) \rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \begin{cases} x = -4, \ \ y = 20 \\ x = 2, \ \ y = 5 \end{cases}$

$$\text{Área} = 2\left[\int_0^4 \frac{1}{2}(5x + 20) - \frac{5}{4}x^2\right] dx = 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{5x^2}{2} + 20x\right) - \frac{5}{4}\,\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 2\left(60 - \frac{80}{3}\right) = \frac{200}{3} \text{ u}^2$$