41 **Dada la función** $f(x) = a\, e^{x/3} + \dfrac{1}{x^2}\ (x \neq 0)$**:**

a) Calcula $\displaystyle\int_1^2 f(x)\, dx$ **en función de** a**.**

b) Se sabe que F **es una primitiva de** f**. Calcula** a **si** $F(1) = 0$ **y** $F(2) = 1/2$**.**

Resolución

a) $\displaystyle\int_1^2 f(x)\, dx = \int_1^2 \left(ae^{x/3} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[3ae^{x/3} - \frac{1}{x}\right]_1^2 = \left(3ae^{2/3} - \frac{1}{2}\right) - (3ae^{1/3} - 1) = 3a(e^{2/3} - e^{1/3}) + \frac{1}{2}$

b) Si F es una primitiva de f, tenemos que:

$$F(x) = 3ae^{x/3} - \frac{1}{x} + k$$

Tenemos que hallar k y a para que:

$$\left.\begin{array}{ll} F(1) = 0 & \to\ 3ae^{1/3} - 1 + k = 0 \\ F(2) = \dfrac{1}{2} & \to\ 3ae^{2/3} - \dfrac{1}{2} + k = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} 3ae^{1/3} + k = 1 \\ 3ae^{2/3} + k = 1 \end{array}\right\}$$

Restando la 2.ª ecuación menos la 1.ª:

$$3a(e^{2/3} - e^{1/3}) = 0\ \to\ a = 0\ \to\ k = 1$$

Por tanto: $F(x) = -\dfrac{1}{x} + 1$