1 **En una población, la proporción de individuos que tienen una cierta característica C es 0,32.**

a) ¿Cómo se distribuyen las posibles proporciones pr de individuos que tienen la característica C en muestras de 200 individuos?

b) Halla el intervalo característico de pr correspondiente al 95%.

c) Calcula la probabilidad de que en una muestra la proporción sea menor que 0,3.

Resolución

a) En la población, $p = 0{,}32$.

Las proporciones muestrales, pr, se distribuyen $N\left(p, \sqrt{\dfrac{pq}{n}}\right)$.

$$\sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}32 \cdot 0{,}68}{200}} = 0{,}033$$

Es decir, pr se distribuye $N(0{,}32; 0{,}033)$.

b) En una normal $N(0, 1)$, el intervalo característico correspondiente al 95% es $(-1{,}96; 1{,}96)$.

$$0{,}32 - 1{,}96 \cdot 0{,}033 = 0{,}255$$

$$0{,}32 + 1{,}96 \cdot 0{,}033 = 0{,}647$$

El intervalo característico para pr (al 95%) es $(0{,}255; 0{,}647)$.

c) $P[pr < 0{,}3] = P\left[z < \dfrac{0{,}3 - 0{,}32}{0{,}033}\right] = P[z < -0{,}61] = 1 - \Phi(0{,}61) = 1 - 0{,}7291 = 0{,}2709$

2 **Se sabe que el 10% de los habitantes de una determinada ciudad va regularmente al teatro.**

Se toma una muestra al azar de 100 habitantes de esta ciudad.

¿Cuál es la probabilidad de que, al menos, un 13% de ellos vaya regularmente al teatro?

Resolución

La distribución x = "n.° de personas que van regularmente al teatro" es una $B(100; 0{,}1)$, donde:

$$p = 0{,}1 \ \text{ y } \ q = 1 - p = 0{,}9$$

Como $100 \cdot 0{,}1 > 5$ y $100 \cdot 0{,}9 > 5$, aproximamos con una distribución $x' \simeq N(np, \sqrt{npq}) = N(10, 3)$, a la que aplicamos la corrección por continuidad:

$$P[x \geq 13] = P[x' \geq 12{,}5] = P\left[z \geq \frac{12{,}5 - 10}{3}\right] = P[z \geq 0{,}83] = 1 - \Phi(0{,}83) = 1 - 0{,}7967 = 0{,}2033$$

3 **En una muestra de 60 estudiantes de una universidad, un tercio habla inglés.**

a) Halla, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo para estimar la proporción de estudiantes que hablan inglés.

b) A la vista del resultado anterior, se va a repetir la experiencia para conseguir una cota de error de 0,01 con el mismo nivel de confianza. ¿Cuántos individuos tendrá la muestra?

Resolución

La proporción muestral es $pr = \frac{1}{3} \rightarrow 1 - pr = \frac{2}{3}$

Para un nivel de confianza del 90%, sabemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}645$.

a) El intervalo de confianza para estimar la proporción en la población es:

$$\left(pr - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}}\ ,\ pr + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}} \right)$$

En este caso queda:

$$\left(\frac{1}{3} - 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{(1/3)\cdot(1/2)}{60}}\ ,\ \frac{1}{3} + 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{(1/3)\cdot(1/2)}{60}} \right); \text{ es decir: } (0{,}2332;\ 0{,}4334)$$

b) En la expresión del error, $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}}$, sabemos que:

$E = 0{,}01$

$z_{\alpha/2} = 1{,}645$ (para un nivel de confianza del 90%)

$pr = \frac{1}{3};\ 1 - pr = \frac{2}{3}$

Por tanto:

$$0{,}01 = 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{(1/3)\cdot(1/2)}{60}} \Rightarrow n \simeq 6\,013{,}4$$

Habrá que tomar una muestra de, al menos, 6 014 individuos.

4 **Una encuesta realizada en cierto país sobre una muestra de 800 personas arroja el dato de que 300 son analfabetas. Para estimar la proporción de analfabetos del país, hemos obtenido el intervalo de confianza (0,3414; 0,4086). ¿Con qué nivel de confianza se ha hecho la estimación?**

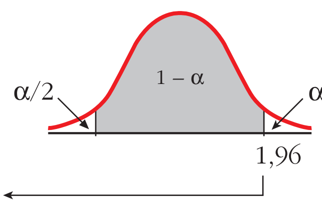
Resolución

La proporción muestral es $pr = \frac{300}{800} = \frac{3}{8} \rightarrow 1 - pr = \frac{5}{8}$

El error máximo admisible es la semiamplitud del intervalo de confianza; es decir:

$$E = \frac{0{,}4086 - 0{,}3414}{2} = 0{,}0336$$

Por tanto: $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}} \rightarrow 0{,}0336 = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{(3/8)\cdot(5/8)}{800}} \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$



$P[z \le 1{,}96] = 0{,}9750$

$\frac{\alpha}{2} = P[z > 1{,}96] = 1 - 0{,}9750 = 0{,}025$

$\alpha = 0{,}025 \cdot 2 = 0{,}05 \rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95$

El nivel de confianza es del 95%.