

1 Resuelve e interpreta geoméricamente los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} y + z - 2x = 0 \\ x + z - 2y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Resolución

$$\text{a) } \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases} \text{ Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones 2.ª y 3.ª:}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases} \begin{matrix} 3x = 5 \rightarrow x = 5/3 \\ y = 2 - x \longrightarrow y = 1/3 \end{matrix}$$

Comprobamos si $(\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$ verifica la 1.ª ecuación:

$$\frac{5}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} \neq 5$$

El sistema no tiene solución. Representa tres rectas que se cortan dos a dos.

$$\text{b) } \begin{cases} y + z - 2x = 0 \\ x + z - 2y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \text{ Ordenamos las incógnitas y las ecuaciones: } \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases}$$

Para resolverlo, aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} \text{FILAS} \\ (1.^{\text{a}}) \\ (2.^{\text{a}}) - (1.^{\text{a}}) \\ (3.^{\text{a}}) + 2 \cdot (1.^{\text{a}}) \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} \text{FILAS} \\ (1.^{\text{a}}) \\ (2.^{\text{a}}) \\ (3.^{\text{a}}) + (2.^{\text{a}}) \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El sistema es *compatible indeterminado*.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2y = -z & x = -\lambda + 2\lambda = \lambda \\ y = z & y = \lambda \end{cases}$$

Soluciones: $(\lambda, \lambda, \lambda)$.

2 Comprueba que el siguiente sistema es compatible determinado y halla su solución.

$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 4y + 3z = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

Resolución

Si el sistema es *compatible determinado*, debe verificarse que $\text{ran}(M) = \text{ran}(M') = 3$, según el teorema de Rouché. Como M' es una matriz cuadrada de orden 4, su determinante debe ser igual a 0.

$$|M'| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{FILAS} \\ (1.^{\text{a}}) \\ (2.^{\text{a}}) \\ (3.^{\text{a}}) + (1.^{\text{a}}) \\ (4.^{\text{a}}) + (1.^{\text{a}}) \end{matrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ porque la 2.ª y 4.ª filas son iguales.}$$



Podemos eliminar la última ecuación y resolverlo por la regla de Cramer:

$$\left. \begin{array}{l} -x + y + z = 1 \\ 4y + 3z = 2 \\ x + 2y = 1 \end{array} \right\} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{5} = -\frac{3}{5}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{5} = \frac{4}{5}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{5} = -\frac{2}{5}$$

Solución: $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

3 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = (x \quad m), \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} -y + 2m + 2 \\ -2x - my + 5 \end{pmatrix}$$

a) Si $(AB)(2C - D) = E$, plantea un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas (x e y) en función de m .

b) ¿Para qué valores de m tiene el sistema solución? Resuélvelo.

Resolución

a) $(AB)(2C - D) = E$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (x \quad m) = \begin{pmatrix} 3x & 3m \\ x & m \end{pmatrix}$$

$$2C - D = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)(2C - D) = E \rightarrow \begin{pmatrix} 3x & 3m \\ x & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + 2m + 2 \\ -2x - my + 5 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 3m = -y + 2m + 2 \\ x + m = -2x - my + 5 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} 3x + y = 2 - m \\ 3x + my = 5 - m \end{array}$$

b) El sistema tendrá solución si $\text{ran}(M) = \text{ran}(M')$, siendo:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & m \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 - m \\ 3 & m & 5 - m \end{pmatrix}$$

Buscamos los valores de m que hacen $|M| = 0$:

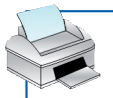
$$3m - 3 = 0 \rightarrow m = 1$$

• Si $m \neq 1$, $\text{ran}(M) = \text{ran}(M') = 2 = n.$ de incógnitas. El sistema es compatible determinado.

• Si $m = 1$, $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $\text{ran}(M) = 1$.

$$M' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{ran}(M') = 2$$

El sistema es incompatible.



- Resolución:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y = 2 - m \\ 3x + my = 5 - m \end{array} \right\} \text{Restamos ambas ecuaciones:}$$

$$y - my = 2 - m - 5 + m \rightarrow y(1 - m) = -3 \rightarrow y = \frac{-3}{1 - m}$$

Sustituimos en la primera ecuación:

$$3x - \frac{3}{1 - m} = 2 - m \rightarrow 3x = 2 - m + \frac{3}{1 - m} \rightarrow x = \frac{m^2 - 3m + 5}{3(1 - m)}$$

- 4 a) Despeja la matriz X en la siguiente ecuación y halla su valor:**

$$2A - AX = BX, \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula $A^{12} + A^{-1}$.

Resolución

$$\begin{aligned} \text{a) } 2A - AX = BX &\rightarrow 2A = BX + AX \rightarrow 2A = (B + A)X \rightarrow (B + A)^{-1} \cdot 2A = (B + A)^{-1} (B + A)X \rightarrow \\ &\rightarrow (B + A)^{-1} 2A = I \cdot X \rightarrow X = (B + A)^{-1} 2A \end{aligned}$$

$$B + A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Hallamos $(B + A)^{-1}$:

$$|B + A| = 12; \text{ Adj}(B + A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow [\text{Adj}(B + A)]^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (B + A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} (B + A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \\ 2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \right\} X = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

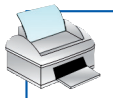
$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^{12} = A^4 \cdot A^4 \cdot A^4 = I^3 = I$$

Hallamos A^{-1} :

$$|A| = 1 \rightarrow \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow [\text{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{12} + A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



- 5** Sea M una matriz de orden tres cuyas filas son F_1, F_2, F_3 y de la que sabemos que $\det(M) = -2$. ¿Cuál será el valor del determinante de la matriz cuyas filas son $F_1 - F_2, 2F_1, F_2 + F_3$? Justifica tu respuesta.

Resolución

$$M = (F_1 \ F_2 \ F_3), \quad |M| = -2$$

$$\begin{vmatrix} F_1 - F_2 \\ 2F_1 \\ F_2 + F_3 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} - \begin{vmatrix} 2F_1 \\ -F_2 + F_1 \\ F_3 + F_2 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} 2 \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_2 \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} 2 \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = 2(-2) = -4$$

(1) Cambiamos el signo del determinante al permutar F_1 y F_2 .

(2) Sacamos como factor común el 2 en F_1 y -1 en F_2 .

(3) El valor del determinante no cambia al restar F_1 a F_2 , ni al sumar F_2 a F_3 .

- 6** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, obtén todas las matrices B que conmutan con A ; es decir, tales que:

$$A \cdot B = B \cdot A$$

Resolución

$$\text{Sea } B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a - c & b - d \end{pmatrix} \\ B \cdot A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a - b \\ d & c - d \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} c &= b \\ d &= a - b \\ a - c &= d \\ b - d &= c - d \end{aligned} \left. \right\} \begin{aligned} c &= b \\ d &= a - b \end{aligned}$$

Hay infinitas soluciones. Las matrices B que cumplen $A \cdot B = B \cdot A$ son de la forma:

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a - b \end{pmatrix} \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

$$\text{Por ejemplo, si } a = 1 \text{ y } b = 2: B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- 7** Una cooperativa farmacéutica distribuye un producto en tres tipos de envases, A, B y C , cuyos precios y pesos son los de esta tabla:

	PESO (g)	PRECIO (€)
A	250	1,00
B	500	1,80
C	1000	3,30

Una farmacia compra 5 envases con un peso total de 2,5 kg por un importe de 8,90 €. ¿Cuántos envases de cada tipo ha comprado la farmacia?

Resolución

$$\text{Llamemos: } \begin{cases} x = \text{n.}^\circ \text{ de envases de } A \\ y = \text{n.}^\circ \text{ de envases de } B \\ z = \text{n.}^\circ \text{ de envases de } C \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 5 \\ 0,25x + 0,5y + z = 2,5 \\ x + 1,8y + 3,3z = 8,9 \end{cases}$$

$$\text{Resolvemos por la regla de Cramer: } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,25 & 0,5 & 1 \\ 1 & 1,8 & 3,3 \end{vmatrix} = -0,025$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2,5 & 0,5 & 1 \\ 8,9 & 1,8 & 3,3 \end{vmatrix}}{-0,025} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0,25 & 2,5 & 1 \\ 1 & 8,9 & 3,3 \end{vmatrix}}{-0,025} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0,25 & 0,5 & 2,5 \\ 1 & 1,8 & 8,9 \end{vmatrix}}{-0,025} = 1$$

Solución: La farmacia ha comprado 2 envases del producto A , 2 del B y 1 del C .



- 8** La suma de las tres cifras de un número es 6. Si se intercambian la primera y la segunda, el número aumenta en 90 unidades. Si se intercambian la segunda y la tercera, el número aumenta en 9 unidades. Calcula dicho número.

Resolución

Sea a la cifra de las centenas; b , la de las decenas, y c , la de las unidades. El número es $100a + 10b + c$.

- Sabemos que: $a + b + c = 6$
- Si intercambiamos la 1.^a y 2.^a cifras, resulta:

$$100b + 10a + c = 100a + 10b + c + 90 \rightarrow a = b - 1$$

- Si intercambiamos la 2.^a y la 3.^a, tendremos:

$$100a + 10c + b = 100a + 10b + c + 9 \rightarrow c = 1 + b$$

- Resolvemos, pues, el sistema siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 6 \\ a = b - 1 \\ c = 1 + b \end{array} \right\} a = 1; b = 2; c = 3$$

El número buscado es 123.

- 9** En la región determinada por $x + y \geq 2$; $x \leq y$; $x \geq 0$ e $y \geq 0$, halla el punto en el que la función $F(x, y) = 3x + 4y$ alcanza su valor mínimo. ¿Puede alcanzar su máximo en esa región?

Resolución

La región factible es la zona sombreada, con vértices $A(1, 1)$ y $B(0, 2)$.

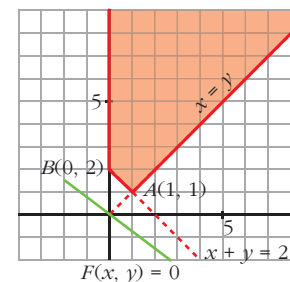
Calculamos el valor de F en A y en B :

$$F(1, 1) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 7$$

$$F(0, 2) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 8$$

Se alcanza el mínimo en el punto $A(1, 1)$.

No puede alcanzar el máximo por ser una región abierta.



- 10** El jefe de seguridad de un museo estudia combinar dos sistemas antirrobo: cámaras de vigilancia en las salas y alarmas en puntos estratégicos del edificio. Se quiere utilizar un mínimo de 6 cámaras para las salas más importantes y un máximo de 15 cámaras con las que quedarían cubiertas todas las salas. El número de alarmas debe ser, al menos, 6. Tiene un presupuesto de 36 000 €; cada cámara cuesta 1 000 €, y cada alarma, 500 €.

a) ¿Qué combinaciones se pueden instalar cumpliendo los requerimientos anteriores? Plantea el problema y representa el conjunto de soluciones. ¿Podría instalar 7 cámaras y 59 alarmas?

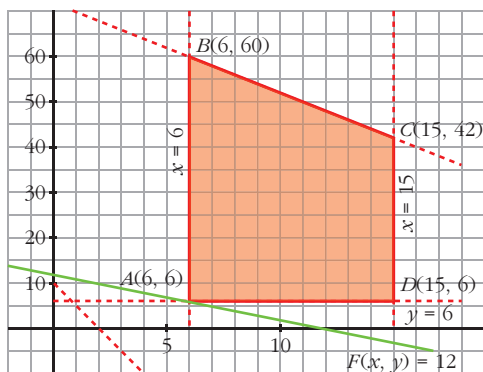
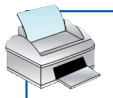
b) Si desea colocar el mayor número de dispositivos, entre cámaras y alarmas, ¿cuántos ha de colocar de cada tipo y cuál será el coste?

Resolución

Es un problema de programación lineal.

a) Sean x : número de cámaras e y : número de alarmas.

Las restricciones son: $6 \leq x \leq 15$; $y \geq 6$; $1000x + 500y \leq 36000$



Para representar la región factible, dibujamos las rectas:

$$x = 6; \quad x = 15; \quad y = 6$$

$$1000x + 500y = 36000 \rightarrow 2x + y = 72$$

El conjunto de soluciones son todos los puntos con las dos coordenadas enteras que se encuentran en la región factible.

No se pueden instalar 7 cámaras y 59 alarmas porque no se cumpliría la última restricción:

$$7 \cdot 1000 + 500 \cdot 59 = 36500 > 36000$$

b) La función objetivo es $F(x) = x + y$.

Su máximo se alcanza en uno de los vértices de la región factible.

$$F(6, 6) = 6 + 6 = 12 \quad F(15, 42) = 15 + 42 = 57$$

$$F(15, 6) = 15 + 6 = 21 \quad F(6, 60) = 6 + 60 = 66$$

El máximo se alcanza instalando 6 cámaras y 60 alarmas.

El coste total será:

$$1000 \cdot 6 + 500 \cdot 60 = 36000 \text{ €}$$

11 Una empresa produce dos tipos de microprocesadores, A y B. El A requiere 3 minutos de fabricación y 2 minutos de montaje, y el B requiere 2 minutos de fabricación y 4 minutos de montaje. Si solo se dispone diariamente de 4 horas para la fabricación y 4 horas para el montaje, siendo el beneficio obtenido de 160 € por cada microprocesador A y de 190 € por cada microprocesador B, se pide, justificando la respuesta:

a) ¿Cuántos microprocesadores hay que producir de cada tipo para obtener unos beneficios máximos?

b) ¿Cuál será el valor de dichos beneficios máximos?

Resolución

a) Llamamos x al número de microprocesadores del tipo A e y al número de microprocesadores del tipo B.

	TIPO A	TIPO B	TIEMPO DISPONIBLE
FABRICACIÓN (min)	$3x$	$2y$	240
MONTAJE (min)	$2x$	$4y$	240
BENEFICIO (€)	$160x$	$190y$	

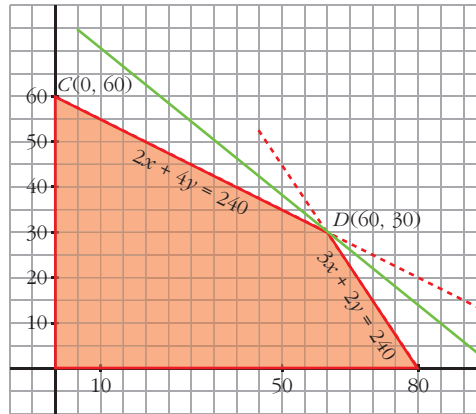
• La función objetivo que hay que maximizar es $F(x, y) = 160x + 190y$.

• Las restricciones son:

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 240 \\ 2x + 4y \leq 240 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



- La región factible es la zona sombreada:



- Calculamos las coordenadas del vértice D :

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{240 - 3x}{2} \\ y = \frac{120 - x}{2} \end{array} \right\} \frac{240 - 3x}{2} = \frac{120 - x}{2} \Rightarrow 120 = 2x \Rightarrow x = 60, y = 30 \Rightarrow D(60, 30)$$

Para obtener el máximo, hallamos los valores de $F(x, y)$ en los vértices de la región factible:

$$F(0, 60) = 11\,400$$

$$F(60, 30) = 9\,600 + 5\,700 = 15\,300$$

$$F(80, 0) = 12\,800$$

- b) El beneficio máximo es de 15 300 euros y se obtiene produciendo 60 microprocesadores del tipo A y 30 del tipo B.