



- 1 a) Halla el valor de k para que la función $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en $x = 1$.
- b) Representa la función para ese valor de k .
- c) ¿Es derivable en $x = 1$?

Resolución

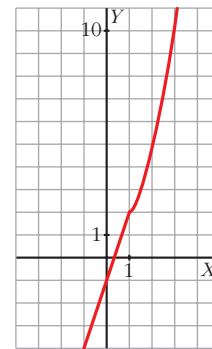
a) Para que f sea continua en $x = 1$, ha de ser $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x - 1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + k) = 1 + k \end{array} \right\} 2 = 1 + k \rightarrow k = 1$$

$$f(1) = 2$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para valores $x \leq 1$, la gráfica es una recta; para $x > 1$, la gráfica es un trozo de parábola.



$$c) f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = 3 \\ f'(1^+) = 2 \end{array} \right\} \text{No es derivable en } x = 1 \text{ porque } f'(1^-) \neq f'(1^+).$$

- 2 Estudia las asíntotas y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ y represéntala gráficamente.

Resolución

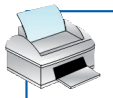
- Asíntotas verticales:

$$1 - x^2 = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \rightarrow \text{Posición: } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{1-x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{1-x^2} = -\infty \end{array} \right. \\ x = -1 \rightarrow \text{Posición: } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x}{1-x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x}{1-x^2} = -\infty \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{1-x^2} = 0 \rightarrow y = 0 \text{ es asíntota horizontal.}$$

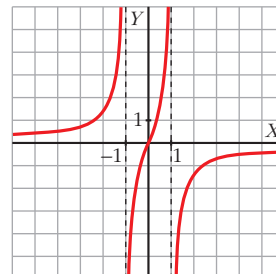
$$\text{Posición } \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } x \rightarrow +\infty, f(x) < 0 \\ \text{Si } x \rightarrow -\infty, f(x) > 0 \end{array} \right.$$



- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:

$$y' = \frac{2x^2 + 2}{(1 - x^2)^2} \rightarrow y' > 0 \text{ para cualquier valor de } x.$$

La función es creciente en todo su dominio. No tiene máximos ni mínimos.

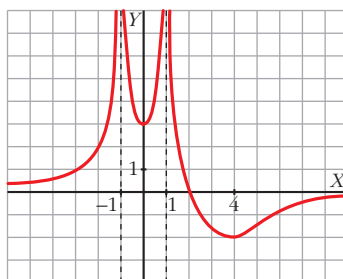


3 La función $y = f(x)$ tiene las siguientes propiedades:

- Su dominio es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Es continua en todo su dominio y corta el eje OX en $x = 2$.
- Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ con $f(x) < 0$ si $x > 2$ y $f(x) > 0$ si $x < 2$, $x \neq 1$, $x \neq -1$.
- Tiene una asíntota vertical en $x = 1$ con $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$
- Tiene una asíntota vertical en $x = -1$ con $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$
- Tiene un mínimo en $(4, -2)$ y otro en $(0, 3)$.

Representa gráficamente la función.

Resolución



4 Halla la ecuación de la tangente a la curva $f(x) = x^2\sqrt{1 - 3x}$ en el punto de abscisa $x = -1$.

Resolución

- Punto de tangencia: $x = -1$; $f(-1) = (-1)^2\sqrt{1 - 3(-1)} = 2$

- Pendiente de la recta tangente: $f'(x) = 2x\sqrt{1 - 3x} + x^2 \frac{(-3)}{2\sqrt{1 - 3x}}$

$$f'(x) = \frac{4x(1 - 3x) - 3x^2}{2\sqrt{1 - 3x}} = \frac{4x - 15x^2}{2\sqrt{1 - 3x}}$$

$$m = f'(-1) = \frac{-4 - 15}{4} = -\frac{19}{4}$$

- Ecuación de la recta tangente:

$$y = 2 - \frac{19}{4}(x + 1)$$



- 5** Calcula a , b y c de modo que la función $f(x) = ax^3 - x^2 + bx + c$ pase por el punto $(0, 5)$, tenga un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 3$.

Resolución

$$f(x) = ax^3 - x^2 + bx + c \rightarrow f'(x) = 3ax^2 - 2x + b$$

- Pasa por $(0, 5) \rightarrow f(0) = 5 \rightarrow c = 5$
 - Máximo en $x = -1 \rightarrow f'(-1) = 0 \rightarrow 3a + 2 + b = 0$
 - Mínimo en $x = 3 \rightarrow f'(3) = 0 \rightarrow 27a - 6 + b = 0$
- $$\left. \begin{array}{l} 3a + b = -2 \\ 27a + b = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 1/3 \\ b = -3 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$$

- 6** Halla el dominio de definición, los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de la función:

$$y = x + \sqrt{1-x}$$

Resolución

- Dominio: $1 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 1 \rightarrow Dom = (-\infty, 1]$
- Para hallar los máximos y los mínimos, calculamos la derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2\sqrt{1-x} - 1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{1-x} - 1}{2\sqrt{1-x}} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1-x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{3}{4}, f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}$$

Comprobamos con la segunda derivada si el punto $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$ es máximo o mínimo:

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1-x)^{-3/2} = \frac{-1}{4\sqrt{(1-x)^3}}$$

$$f''\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{4(1/2)^3} < 0 \rightarrow \text{Hay un máximo en } \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right).$$

- Para hallar los puntos de inflexión, igualamos a cero la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{(1-x)^3}} = 0 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

No tiene puntos de inflexión.



7 La recta de pendiente 3 que pasa por el punto $(0, -2)$ es tangente a la curva $y = x^3$. Calcula las coordenadas del punto de tangencia.

Resolución

- Hallamos los puntos en los que la derivada es igual a 3:

$$f'(x) = 3x^2 \rightarrow 3x^2 = 3 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = 1 \rightarrow f(1) = 1 \\ x = -1 \rightarrow f(-1) = -1 \end{cases}$$

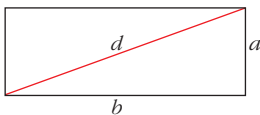
- Veamos cuál de los dos está en la recta dada:

$$\text{Ecuación de la recta } y = -2 + 3x \begin{cases} (1, 1) \rightarrow y = -2 + 3 = 1 \\ (-1, -1) \rightarrow y = -2 - 3 \neq -1 \end{cases}$$

Punto de tangencia: $(1, 1)$.

8 De todos los rectángulos de perímetro 10 m, halla las dimensiones del que tiene la diagonal mínima.

Resolución



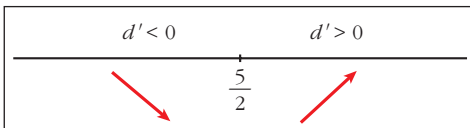
$$2a + 2b = 10 \rightarrow a + b = 5 \rightarrow b = 5 - a$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (5 - a)^2} = \sqrt{2a^2 - 10a + 25}$$

Para hallar el mínimo de d , igualamos a cero su derivada:

$$d' = \frac{4a - 10}{2\sqrt{2a^2 - 10a + 25}} = \frac{2a - 5}{\sqrt{2a^2 - 10a + 25}} = 0 \rightarrow 2a - 5 = 0 \rightarrow a = \frac{5}{2}; b = \frac{5}{2}$$

Estudiamos el signo de d' :



Si $a = \frac{5}{2}$, la diagonal es mínima.

El rectángulo que tiene la diagonal mínima es el cuadrado de lado $a = \frac{5}{2}$ m.

9 Durante los 60 minutos de duración de cierto programa de radio, su índice de audiencia viene dado por la función $I(t) = at^2 + bt + c$, $0 \leq t \leq 60$. Sabiendo que cuando se inicia el programa el índice de audiencia es 20 y que a los 40 minutos se alcanza el máximo índice de audiencia de 36:

a) Determina a , b y c . Justifica la respuesta.

b) Representa la función obtenida.

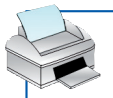
Resolución

a) $I(t) = at^2 + bt + c$, $0 \leq t \leq 60 \rightarrow I'(t) = 2at + b$

Como $I(0) = 20 \rightarrow c = 20$

$$I(40) = 36 \rightarrow a \cdot 40^2 + b \cdot 40 + c = 36$$

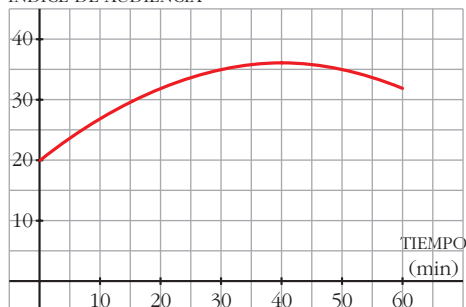
$$I'(40) = 0 \rightarrow 2 \cdot a \cdot 40 + b = 0$$



$$\left. \begin{aligned} 1600a + 40b &= 16 \\ 80a + b &= 0 \end{aligned} \right\} a = -\frac{1}{100}, \quad b = \frac{4}{5}, \quad c = 20$$

$$I(t) = -\frac{t^2}{100} + \frac{4}{5}t + 20$$

b) ÍNDICE DE AUDIENCIA



10 Sea la función $f(x) = \begin{cases} -2x - a & \text{si } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ bx - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Halla a y b para que la función sea continua en el conjunto \mathbb{R} .

b) Representa la función para los valores $a = 0$ y $b = 3$.

c) Para $a = 0$ y $b = 3$, halla el área de la región plana limitada por la gráfica de f , el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

Resolución

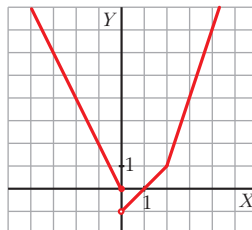
a) f es continua en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$ por estar definida mediante funciones polinómicas. Estudiamos la continuidad en $x = 0$ y en $x = 2$:

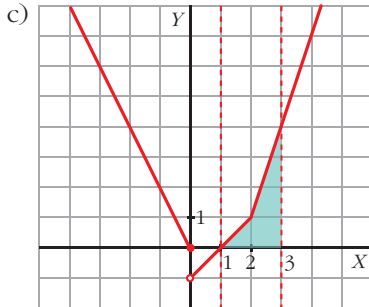
$$\bullet \quad x = 0 \quad \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &\left\{ \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2x - a) &= -a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) &= -1 \end{aligned} \right. \\ f(0) &= -a \end{aligned} \right\} \text{ Si } -a = -1 \rightarrow a = 1, f \text{ es continua en } x = 0.$$

$$\bullet \quad x = 2 \quad \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &\left\{ \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 1) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (bx - 5) &= 2b - 5 \end{aligned} \right. \\ f(2) &= 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 2b - 5 &= 1 \rightarrow b = 3 \\ \text{Si } b &= 3, f \text{ es continua en } x = 2. \end{aligned}$$

Si $a = 1$ y $b = 3$, f es continua en \mathbb{R} .

b) $f_2(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 3x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

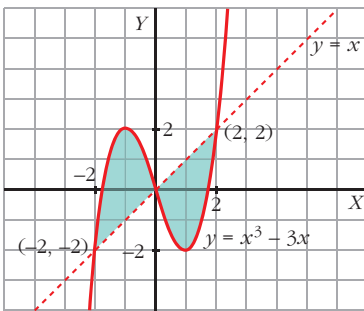




$$A = \int_1^2 (x-1) dx + \int_2^3 (3x-5) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 + \left[\frac{3x^2}{2} - 5x \right]_2^3 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3 \text{ u}^2$$

11 Representa el recinto limitado por las gráficas de las funciones $y = x^3 - 3x$ e $y = x$. Después, calcula su área.

Resolución



La gráfica de $y = x^3 - 3x$ corta a los ejes en los puntos: $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$ y $(-\sqrt{3}, 0)$

Tiene un máximo en $(-1, 2)$ y un mínimo en $(1, -2)$.

Puntos de corte:

$$\begin{cases} y = x^3 - 3x \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^3 - 3x = x \rightarrow x^3 - 4x = 0 \rightarrow x = 0, x = -2, x = 2$$

El recinto es simétrico.

$$\text{Área} = \int_{-2}^0 (x^3 - 3x - x) dx + \int_0^2 [x - (x^3 - 3x)] dx = 2 \int_0^2 (4x - x^3) dx = 2 \left[2x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 8 \text{ u}^2$$

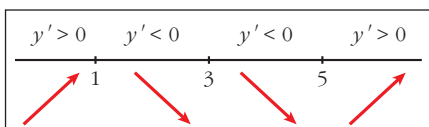
12 Calcula el área limitada por la función $y = \frac{(x-1)^2}{x-3}$, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 1$.

Resolución

Representamos la función $y = \frac{(x-1)^2}{x-3}$:

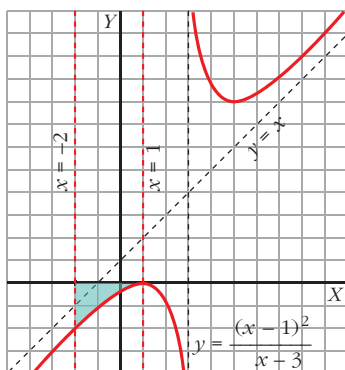
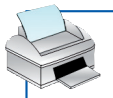
- Asíntota vertical: $x = 3$ $\begin{cases} \text{Si } x < 3, y \rightarrow -\infty \\ \text{Si } x > 3, y \rightarrow +\infty \end{cases}$
- Asíntota oblicua: $y = x + 1$ $\begin{cases} \text{Si } x \rightarrow +\infty, f(x) > x + 1 \\ \text{Si } x \rightarrow -\infty, f(x) < x + 1 \end{cases}$
- $y' = \frac{2(x-1)(x-3) - (x-1)^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2} = 0 \begin{cases} x = 5, f(5) = 8 \\ x = 1, f(1) = 0 \end{cases}$

Signo de y' :



Máximo: $(1, 0)$

Mínimo: $(5, 8)$



$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_{-2}^1 \frac{(x-1)^2}{x-3} dx \right| = \left| \int_{-2}^1 \left(x+1 + \frac{4}{x-3} \right) dx \right| = \\ &= \left| \left[\frac{x^2}{2} + x + 4 \ln |x-3| \right]_{-2}^1 \right| = \\ &= \left| \left(\frac{3}{2} + 4 \ln 2 \right) - 4 \ln 5 \right| \approx 2,17 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

13 Escribe la expresión analítica de una función $f(x)$ de la que conocemos: $f''(x) = 3$; $f'(1) = 0$ y $f(1) = 5$.

Resolución

$$f''(x) = 3 \rightarrow f'(x) = \int 3 dx = 3x + k; f'(1) = 0 \rightarrow 3 + k = 0 \rightarrow k = -3$$

$$f'(x) = 3x - 3 \rightarrow f(x) = \int (3x - 3) dx = \frac{3x^2}{2} - 3x + k'$$

$$f(1) = 5 \rightarrow \frac{3}{2} - 3 + k' = 5 \rightarrow k' = 8 - \frac{3}{2} = \frac{13}{2}$$

$$f(x) = \frac{3x^2}{2} - 3x + \frac{13}{2}$$

14 Dada la función $f(x) = x + \frac{a}{x^3}$ donde a es una constante:

a) Encuentra una primitiva de f .

b) Si F es una primitiva de f , ¿puede serlo también $G(x) = F(x) + 2x$?

c) Halla a sabiendo que $\int_1^2 f(x) = 1,5$.

Resolución

$$a) F(x) = \int \left(x + \frac{a}{x^3} \right) dx = \frac{x^2}{2} + a \cdot \frac{x^{-2}}{-2} = \frac{x^2}{2} - \frac{a}{2x^2}$$

$$b) G(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{a}{2x^2} + 2x \rightarrow G'(x) = x + \frac{a}{x^3} + 2$$

G no es una primitiva de f porque $G'(x) \neq f(x)$.

$$c) \int_1^2 f(x) = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{a}{2x^2} \right]_1^2 = 1,5 \rightarrow \frac{3}{2} + \frac{3a}{8} = \frac{3}{2} \rightarrow a = 0$$