1 **Calcula $P[A \cup B]$ y $P[A \cap B]$ sabiendo que:**

$P[A] = 0,6$

$P[B] = 0,8$

$P[A \cup B] - P[A \cap B] = 0,4$

Resolución

$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0,6 + 0,8 - P[A \cap B]$

Como $P[A \cup B] = 0,4 + P[A \cap B]$:

$$0,4 + P[A \cap B] = 1,4 - P[A \cap B] \Rightarrow 2P[A \cap B] = 1 \Rightarrow P[A \cap B] = 0,5 \Rightarrow P[A \cup B] = 0,4 + 0,5 = 0,9$$

Así:

$$P[A \cup B] = 0,9 \text{ y } P[A \cap B] = 0,5$$

2 **De dos tiradores, se sabe que uno de ellos hace dos dianas de cada tres disparos y el otro consigue tres dianas de cada cuatro disparos.**

Si los dos disparan simultáneamente, calcula:

a) La probabilidad de que los dos acierten.

b) La probabilidad de que uno de ellos acierte y el otro no.

c) La probabilidad de que ninguno de los dos tiradores acierte.

d) La probabilidad de que alguno de ellos acierte.

Resolución

Sean los sucesos:

$$A = \text{“Acierte el primer tirador”} \rightarrow P[A] = \frac{2}{3}$$

$$B = \text{“Acierte el segundo tirador”} \rightarrow P[B] = \frac{3}{4}$$

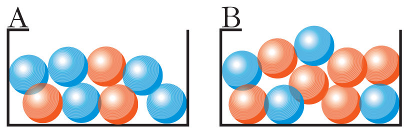
a) $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B] = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$, pues los dos sucesos son independientes.

b) $P[A \cap B'] + P[A' \cap B] = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{12}$

c) $P[A' \cap B'] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

d) $P[A \cup B] = 1 - P[A' \cap B'] = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

3 **Tenemos dos urnas, A y B. En A se han introducido 3 bolas rojas y 5 azules, y en B, 6 bolas rojas y 4 azules.**



Si sacamos de alguna de las urnas una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja?

Resolución

$$P[\text{ROJA}] = P[A] \cdot P[\text{ROJA}/A] + P[B] \cdot P[\text{ROJA}/B] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} = \frac{39}{80}$$

4 **En cierta cadena de centros comerciales, el número de trabajadores por departamentos es el siguiente:**

- **150 personas en el departamento de personal.**
- **450 personas en el departamento de ventas.**
- **200 personas en el departamento de contabilidad.**
- **100 personas en el departamento de atención al cliente.**

Con el objetivo de realizar una encuesta laboral, se quiere seleccionar una muestra de 180 trabajadores:

a) ¿Qué tipo de muestreo deberíamos utilizar para la selección de la muestra si queremos que incluya a trabajadores de los cuatro departamentos mencionados?

b) ¿Qué número de trabajadores tendríamos que seleccionar en cada departamento atendiendo a un criterio de proporcionalidad?

Resolución

a) Deberíamos utilizar un muestreo aleatorio estratificado, ya que la población está formada por cuatro estratos y queremos asegurarnos de que en la muestra haya representantes de cada uno de ellos. Si, además, queremos que el número de individuos elegidos de cada estrato sea proporcional al tamaño de dicho estrato, debemos utilizar el muestreo aleatorio estratificado con reparto proporcional.

b) $N = 150 + 450 + 200 + 100 = 900$

$$\frac{180}{900} = \frac{n_1}{150} = \frac{n_2}{450} = \frac{n_3}{200} = \frac{n_4}{100} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 0{,}2 \cdot 150 = 30 \\ n_2 = 0{,}2 \cdot 450 = 90 \\ n_3 = 0{,}2 \cdot 200 = 40 \\ n_4 = 0{,}2 \cdot 100 = 20 \end{cases}$$

Hay que coger a 30 trabajadores de personal, a 90 de ventas, a 40 de contabilidad y a 20 de atención al cliente.

5 **En una fábrica de pilas se sabe que la desviación típica de la duración de cierto tipo de pilas es de 80 horas.**

a) Si $\alpha = 0{,}1$, y en una muestra de 50 de esas pilas la duración media es de 500 horas, determina el intervalo de confianza para la duración media poblacional.

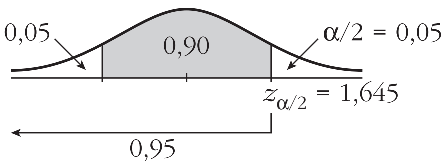
b) Si la duración de ese tipo de pilas siguiera una normal de media 500 horas y desviación típica 80 horas, ¿cuál sería la probabilidad de que la duración media de 9 pilas fuese mayor que 520 horas?

Resolución

a) Los intervalos de confianza para la media tienen la forma:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Si $\alpha = 0{,}1$, $z_{\alpha/2} = 1{,}645$, ya que:



En este caso, el intervalo de confianza pedido es:

$$\left(500 - 1{,}645 \cdot \frac{80}{\sqrt{50}}\ ,\ 500 + 1{,}645 \cdot \frac{80}{\sqrt{50}}\right) = (481{,}39;\ 518{,}61)$$

b) Si la duración de las pilas se distribuye $N(500, 80)$, las muestras de tamaño 9 se distribuyen:

$$N\left(500, \frac{80}{\sqrt{9}}\right) = N(500;\ 26{,}67)$$

$$P[\overline{x} > 520] = P\left[z > \frac{520 - 500}{26{,}67}\right] = P[z > 0{,}75] = 1 - P[z < 0{,}75] = 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266$$

6 **El 70% de los alumnos de bachillerato tiene teléfono móvil.**

a) Si un centro tiene 1 400 alumnos de bachillerato, ¿cuántos de estos se espera que tengan teléfono móvil?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, en una muestra de 150 alumnos de bachillerato, haya más de 100 con teléfono móvil?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que, en una muestra de 200 alumnos de bachillerato, haya, como máximo, 140 con teléfono móvil?

Resolución

a) $\frac{70}{100} \cdot 1\,400 = 980$ alumnos se espera que tengan teléfono móvil.

b) La distribución x = "número de alumnos de los 150 con teléfono móvil" es una $B(150;\ 0{,}7)$.

Como $150 \cdot 0{,}7 > 5$ y $150 \cdot 0{,}3 > 5$, podemos aproximarla por una distribución normal:

$$x' \sim N(np, \sqrt{npq}\,) = N(150 \cdot 0{,}7;\ \sqrt{150 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}\,) = N(105;\ 5{,}6)$$

a la que aplicamos la corrección por continuidad:

$$P[x > 100] = P[x' > 100,\ 5] = P\left[z > \frac{100{,}5 - 105}{5{,}6}\right] = P[z > -0{,}8] = P[z < 0{,}8] = \phi(0{,}8) = 0{,}7881$$

c) $x \sim B(200;\ 0{,}7) \;\Rightarrow\; x' \sim N(140;\ 6{,}48)$

Ahora:

$$P[x \le 140] = P[x' \le 140{,}5] = P\left[z \le \frac{140{,}5 - 140}{6{,}48}\right] = P[z \le 0{,}08] = \phi(0{,}08) = 0{,}5319$$

7 **Según los datos de cierta comunidad autónoma relativos al impuesto sobre la renta en el pasado ejercicio fiscal, la contribución media fue de 4 000 €. En una muestra de 500 declaraciones del año en curso, elegidas al azar, la contribución media ha sido de 4 120 €, con una desviación típica de 1 200 €.**

a) ¿Puede decirse, con un nivel de significación del 5%, que ha variado la aportación media de los contribuyentes?

b) ¿Y con un nivel de significación del 1%?

Resolución

Planteamos un test de hipótesis bilateral para la media.

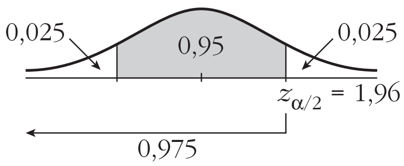
H_0: $\mu = 4\,000$ (es decir, hacemos la hipótesis de que la contribución media no ha variado).

H_1: $\mu \ne 4\,000$

La zona de aceptación tiene la forma:

$$\left(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

a) A un $\alpha = 0{,}05$ le corresponde un $z_{\alpha/2} = 1{,}96$:

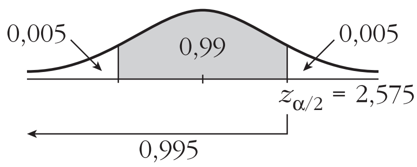


La zona de aceptación es:

$$\left(4\,000 - 1{,}96 \cdot \frac{1\,200}{\sqrt{500}},\ 4\,000 + 1{,}96 \cdot \frac{1\,200}{\sqrt{500}}\right) = (3\,894{,}8;\ 4\,105{,}2)$$

Como $4\,120 \notin (3\,894{,}8;\ 4\,105{,}2)$, rechazamos la hipótesis nula. Con un nivel de significación del 5%, podemos decir que la aportación media de los contribuyentes ha variado.

b) A un $\alpha = 0{,}01$ le corresponde un $z_{\alpha/2} = 2{,}575$:



La zona de aceptación es:

$$\left(4\,000 - 2{,}575 \cdot \frac{1\,200}{\sqrt{500}},\ 4\,000 + 2{,}575 \cdot \frac{1\,200}{\sqrt{500}}\right) = (3\,861{,}8;\ 4\,138{,}2)$$

Como $4\,120 \in (3\,861{,}8;\ 4\,138{,}2)$, aceptamos la hipótesis nula. Con un nivel de significación del 1%, podemos decir que la aportación media de los contribuyentes no ha variado.

8 **Un marca de pipas de girasol afirma que, como máximo, el 6% de las pipas están vacías. Se eligieron 300 pipas al azar y se detectó que 21 de ellas estaban vacías.**

a) Con un nivel de significación del 1%, ¿se puede aceptar la afirmación de la marca?

b) Si se mantiene el porcentaje muestral de pipas que están vacías y $1 - \alpha = 0{,}95$, ¿qué tamaño muestral se necesitaría para estimar la proporción de pipas vacías con un error menor que el 1%?

Resolución

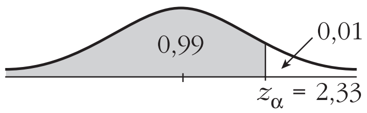
a) Se trata de un contraste de hipótesis unilateral para la proporción.

Sean H_0: $p \le 0{,}06$ y H_1: $p > 0{,}06$.

La zona de aceptación tiene la forma:

$$\left(-\infty\ ,\ p + z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

A un nivel de significación $\alpha = 0{,}01$ le corresponde un $z_\alpha = 2{,}33$, pues:



En este caso, la zona de aceptación es:

$$\left(-\infty\ ,\ 0{,}06 + 2{,}33 \cdot \sqrt{\frac{0{,}06 \cdot 0{,}94}{300}}\right) = (-\infty;\ 0{,}092)$$

La proporción de la muestra es $pr = \dfrac{21}{300} = 0{,}07$.

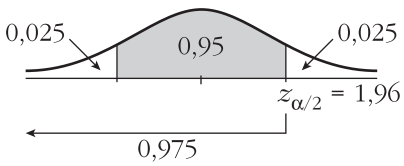
Como $0{,}07 \in (-\infty;\ 0{,}092)$, podemos aceptar la afirmación de la marca con un nivel de significación del 1%.

b) Se trata de una estimación en la cual conocemos el valor del error máximo admisible, $E = 0{,}01$ (radio del intervalo de confianza).

Hemos de calcular el tamaño de la muestra para que el nivel de confianza sea del 95%.

El error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{p_r\, q_r}{n}}$.

Si $1 - \alpha = 0{,}95$, entonces $z_{\alpha/2} = 1{,}96$, pues:



Así:

$$0{,}01 = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}07 \cdot 0{,}93}{n}} \ \Rightarrow\ \sqrt{n} = \frac{1{,}96 \cdot \sqrt{0{,}07 \cdot 0{,}93}}{0{,}01} = 50 \ \Rightarrow\ n = 2\,500$$

Se necesita una muestra de tamaño $n \ge 2\,500$.