2. Curiosidades sobre algunos números irracionales

Soluciones

Hay tres números de gran importancia en matemáticas y que, paradójicamente, nombramos con una letra:

- El número designado con la letra griega $\pi = 3,14159\ldots$ (pi) relaciona la longitud de la circunferencia con su radio (longitud $= 2 \cdot \pi \cdot r$).

- El número $e = 2,71828\ldots$, inicial del apellido de su descubridor Leonhard Euler (matemático suizo del siglo XVIII).

- El número designado con la letra griega $\Phi = 1,61803\ldots$ (fi), llamado número de oro, es la inicial del nombre del escultor griego Fidias, que lo utilizó en sus obras.

Los tres números tienen infinitas cifras decimales y no son periódicos (sus cifras decimales no se repiten periódicamente). Son, por tanto, números irracionales.

Desde el punto de vista matemático, existe una diferencia importante entre los dos primeros y el tercero: mientras que π y e no son solución de ninguna ecuación polinómica, el número de oro, $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, es una de las soluciones de la ecuación de segundo grado $x^2 - x - 1 = 0$. Compruébalo.

EL NÚMERO π

Ya en la antigüedad, los calculistas notaron que todos los círculos conservaban una estrecha relación entre su perímetro y su radio. En el siglo XVII la relación se convirtió en un número, y fue identificado con el nombre de "pi", de *periphereia*, nombre que los griegos daban al perímetro de un círculo.

A lo largo de la Historia, el valor del número π ha tenido muchas variaciones:

- En el antiguo **Egipto,** se tomaba $\pi = 3,1605$ y en la antigua **Babilonia,** era $\pi = 3$.

- En **China,** las aproximaciones para π fueron varias: 3,1447; 3,10; 3,14. En el siglo V d.C., un astrónomo chino llamado Tsu Cheng calculó que π se acercaba a $\frac{355}{113}$.

- En **Europa,** Arquímedes sabía que π cumplía la siguiente relación:

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

- En la **Biblia,** π es 3.

- Los **árabes,** trabajando con polígonos inscritos en una circunferencia, obtuvieron hasta 17 decimales exactos de π.

Así, el número de decimales hallados para π fue aumentando hasta llegar al siglo XX. La aparición de los ordenadores permitió trabajar con más rapidez y, en el momento actual, el récord de cifras decimales encontradas para este número sobrepasa los mil millones.

2. Curiosidades sobre algunos números irracionales
Soluciones

EL NÚMERO *e*

El número e es un número real cuyo valor es 2,718281828459…

Leonhard Euler, matemático del siglo XVIII, fue el primero en estudiar este número (calculó hasta 23 de sus cifras decimales) y en utilizar la letra e para nombrarlo.

Con la llegada de los ordenadores, el cálculo se simplificó y rápidamente los progresos fueron enormes. Así, por ejemplo, en el año 2000, utilizando un programa de cálculo en un ordenador Pentium III 800, se obtuvieron 12 884 901 000 cifras decimales de este número, para lo que se necesitaron 167 horas.

Son muchas las aplicaciones que tiene este número:

- Una cadena o un cable colgados por sus extremos, tienden a adoptar la forma de una curva muy conocida cuya expresión analítica es:

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- Para determinar de una manera aproximada la antigüedad de un objeto que está formado por materia orgánica, se mide la cantidad de carbono 14 que contiene. Los seres vivos tienen una cantidad de carbono 14 constante. Cuando un ser vivo muere, esta cantidad se va desintegrando. La función que regula la desintegración se determina con la siguiente fórmula:

$$Q = Q_0 \cdot e^{-0{,}000124 \cdot t}$$

  donde Q es la cantidad final de carbono 14, Q_0 es la cantidad inicial y t es el tiempo transcurrido.

- Una de las numerosas aplicaciones del número e en biología es el crecimiento exponencial de poblaciones. Este tipo de crecimiento surge cuando no hay factores que limiten el crecimiento. En esos casos se aplica la fórmula:

$$P = P_0 \cdot e^t$$

  que permite averiguar cuál será la población P en un tiempo t a partir de la población inicial P_0.

EL NÚMERO DE ORO, Φ

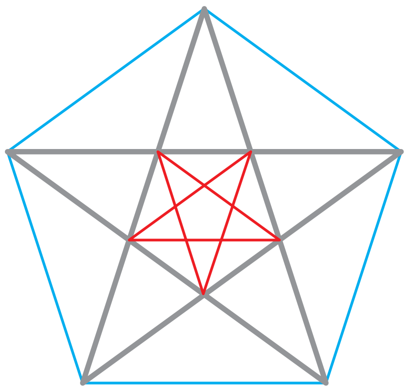
Aunque no fue hasta el siglo XX cuando el matemático Mark Borr designó al número áureo con su símbolo Φ (fi, sexta letra del abecedario griego) en honor a Fidias, sus comienzos se sitúan en Egipto por su aparición en construcciones de pirámides que datan del 2600 a.C.

No obstante, fueron los griegos quienes explotaron al máximo este número, usándolo en todas las facetas del arte. Concretamente, los seguidores de Pitágoras tenían la estrella regular de cinco puntas (obtenida con las dia-

2. Curiosidades sobre algunos números irracionales

Soluciones

gonales de un pentágono regular y en la que Φ aparecía como proporción entre la diagonal del pentágono y su lado) como figura emblema de su sociedad, hasta el punto de llevarla tatuada en el dorso de sus manos. Esta estrella representaba la vida y, puesta con el vértice superior hacia abajo, lo maléfico.



Esta figura les fascinaba por lo que en ella se puede encontrar (segmentos proporcionales, triángulos semejantes…), pero, sobre todo, por su carácter de autorreproductividad hasta el infinito:

- Si se prolongan los lados del pentágono hasta que se encuentren, se obtiene una estrella proporcionalmente mayor a la del interior del pentágono.

- En el hueco interno que dejan las diagonales, aparece un pentágono menor que, a su vez, origina una estrella proporcionalmente más pequeña. Y así hasta el infinito.

También los pitagóricos adoraban el dodecaedro regular; tanto, que en la fórmula de su volumen aparecía el número de oro:

$$\text{Volumen} = \frac{1}{2}\sqrt{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 a^3$$

siendo a la arista del poliedro.

Para ellos, el dodecaedro representaba al propio universo y una proporción que se utiliza para la construcción del universo ha de ser, necesariamente, divina.

El número áureo también se usó mucho en la época del Renacimiento, especialmente en las artes plásticas y en arquitectura. Se consideraba que era la proporción perfecta entre los lados de un rectángulo (rectángulo áureo), y con él se conseguía el equilibrio y la belleza.

Hoy en día, dicho número se puede ver en multitud de diseños: tarjetas de crédito, nuestro DNI…

La arquitectura moderna sigue valiéndose, en sus edificaciones, de la proporción áurea. Está presente, por ejemplo, en el edificio de la ONU en Nueva York (prisma rectangular cuya cara mayor sigue las citadas proporciones).

2. Curiosidades sobre algunos números irracionales
Soluciones

La fascinación que el número áureo ha provocado a lo largo de la Historia, se ha visto plasmada también en la literatura. Rafael Alberti escribió un soneto dedicado a dicho número:

A ti, maravillosa disciplina
Media, extrema razón de la hermosura,
Que claramente acata la clausura
Viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
Áurea sección, celeste cuadratura
Misteriosa fontana de mesura,
Que el universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños angulares,
Flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.

Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.

ACTIVIDADES

1 Comprueba que los DNI y las tarjetas de crédito son rectángulos áureos.

b

a

$a = \boxed{8{,}6 \text{ cm}}$

$b = \boxed{5{,}3 \text{ cm}}$

$\frac{a}{b} \approx \boxed{1{,}62} \approx \Phi$

2 Comprueba que el número de oro, Φ, es solución de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$.

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} = \begin{cases} \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi \\[2ex] \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$