4. Amplía: demostración de la equivalencia de las igualdades para la varianza

Sobre el signo Σ (sumatorio)

Ya sabes que el signo Σ se utiliza para indicar sumas de varios sumandos.

Has encontrado este símbolo en varias expresiones de esta unidad. Por ejemplo:

$$\text{Media} = \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} \qquad \text{Varianza} = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

Si consideramos datos agrupados en tablas de frecuencias:

$$\text{Media} = \bar{x} = \frac{\Sigma x_i f_i}{\Sigma f_i} \qquad \text{Varianza} = \frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{\Sigma f_i} = \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2$$

Recuerda que:

$\Sigma f_i = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ = suma de *todas* las frecuencias = n.º total de datos

$\Sigma f_i x_i = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n$ = suma de *todos* los resultados que se obtienen al multiplicar cada dato por su frecuencia

$\Sigma f_i x_i^2 = f_1 x_1^2 + f_2 x_2^2 + \dots + f_n x_n^2$ = suma de *todos* los resultados que se obtienen al multiplicar el cuadrado de cada dato por la frecuencia correspondiente

Propiedades:

Vamos a ver un par de propiedades que nos ayudarán a justificar que las dos expresiones que tenemos para la varianza (y, por tanto, para la desviación típica) son equivalentes.

1 $\Sigma (x_i + y_i) = \Sigma x_i + \Sigma y_i$

Puesto que: $\Sigma (x_i + y_i) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \dots + (x_n + y_n) =$

$= (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (y_1 + y_2 + \dots + y_n) = \Sigma x_i + \Sigma y_i$

2 $\Sigma k\, x_i = k\, \Sigma x_i$

Puesto que: $\Sigma k\, x_i = k\, x_1 + k\, x_2 + \dots + k\, x_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sacando factor común}}}{=} k(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = k\, \Sigma x_i$

4. Amplía: demostración de la equivalencia de las igualdades para la varianza

Justificación de la equivalencia de las dos expresiones para la varianza (y, por tanto, para la desviación típica)

Queremos probar que:

$$\frac{\Sigma f_i(x_i - \bar{x})^2}{\Sigma f_i} = \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2$$

Veamos, paso a paso, cómo podemos llegar a la segunda expresión a partir de la primera (encima de los signos igual encontrarás el número correspondiente a la propiedad que hemos utilizado de las dos anteriores):

$$\frac{\Sigma f_i(x_i - \bar{x})^2}{\Sigma f_i} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{desarrollamos el cuadrado}}}{=} \frac{\Sigma f_i(x_i^2 - 2x_i\,\bar{x} + \bar{x}^2)}{\Sigma f_i} = \frac{\Sigma(f_i x_i^2 - 2f_i x_i\,\bar{x} + f_i\bar{x}^2)}{\Sigma f_i} =$$

$$\overset{\boxed{1}}{=} \frac{\Sigma f_i\, x_i^2}{\Sigma f_i} + \frac{\Sigma(-2\, f_i\, x_i\, \bar{x})}{\Sigma f_i} + \frac{\Sigma f_i\, \bar{x}^2}{\Sigma f_i} =$$

$$\overset{\boxed{2}}{=} \frac{\Sigma f_i\, x_i^2}{\Sigma f_i} - 2\,\bar{x}\,\overbrace{\frac{\Sigma f_i\, x_i}{\Sigma f_i}}^{=\,\bar{x}} + \bar{x}^2 \cdot \overbrace{\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}}^{=\,1} =$$

$$= \frac{\Sigma f_i\, x_i^2}{\Sigma f_i} - 2\,\bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{x}^2 =$$

$$= \frac{\Sigma f_i\, x_i^2}{\Sigma f_i} - 2\,\bar{x}^2 + \bar{x}^2 =$$

$$= \frac{\Sigma f_i\, x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2$$

Por tanto:

$$\frac{\Sigma f_i(x_i - \bar{x})^2}{\Sigma f_i} = \frac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2$$